ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತ

ಮೂಲ

ಪಾಲ್ ಸಿ ಶೀಲ್ಡ್ಸ್

ಅನುವಾದ

ಎನ್ ಎಮ್ ಅಂಬುಜಾಕ್ಷಿ

1978

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ

ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು

ಪ್ರಕಟಣೆ – 70

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತ

ಮೂಲ

ಪಾಲ್ ಸಿ. ಶೀಲ್ಡ್ಸ್

ಅನುವಾದ

ಎಸ್. ಎಮ್. ಅಂಬುಜಾಕ್ಷಿ

1978

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ

ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು 560024

ಮೂಲ—**ಲೀನಿಯರ್ ಆಲ್ಜಿಬ್ರ** ಪಾಲ್ ಸಿ. ಶೀಲ್ಡ್ಸ್, **ಭಾಷಾಂತರ** – **ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತ** —(ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗದಿಂದ ಸಿದ್ಧಗೊಂಡು ಸಂವಹನ ಸಮಿತಿ ಪ್ರಕಾಶಿತ) ಪ್ರಥಮ ಮುದ್ರಣ 1978. ಪ್ರತಿ 1000, ಪುಟ xvi + 472 + 4. ಬೆಲೆ : ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ ರೂ. **30-00** ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ ರೂ. **35–00**

ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದನೆ

ವೀ. ಚ. ಹಿತ್ತಲಮನಿ

ಸಹ ಸಂಪಾದನೆ

ಉಷಾಕಿರಣ್
ಬೆ. ಗೋ. ರಮೇಶ್

ಅನುವಾದ ಪರಿಶೀಲನೆ

ಎಂ. ಟಿ. ಧೂಪದ

ಮುದ್ರಣ

ಎಂ. ವಿ. ಎಸ್. ಮುದ್ರಣಾಲಯ, ಮಾರುತಿ ಬಡಾವಣೆ,
ಶ್ರೀರಾಮಪುರ, ಬೆಂಗಳೂರು-21

ಕುಲಪತಿಗಳ ಹಾರೈಕೆ

ಇಂದಿನ ವಿಶ್ವದಲ್ಲಿನ ಹಲವಾರು ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಕೃಷಿಉತ್ಪಾದನೆಯ ಹೆಚ್ಚಳವೇ ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಪರಿಹಾರ ಒದಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಕೃಷಿಉತ್ಪಾದನೆಯ ಹೆಚ್ಚಳವು ಕೃಷಿ ಸಂಶೋಧನೆಗಳ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನಳವಡಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ. ಕಳೆದ ಒಂದು ದಶಕದಲ್ಲಿ ಕೃಷಿ ಸಂಶೋಧನೆಯು ನಾನಾಮುಖವಾಗಿ ಬೆಳೆದಿದೆ. ಅದರ ಪ್ರಯೋಜನವನ್ನು ಕೆಲವು ರೈತರು ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಕೆಲವರು ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ, ಜಾಗತಿಕ ಗರಿಷ್ಠ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನಾವೂ ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೆಂಬ ಭರವಸೆಯ ದೃಷ್ಟಾಂತವೆನಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಅಳವಡಿಕೆ ಹಾಗೂ ಸಾಧನೆಗಳು ಕೆಲವರ ಸ್ವತ್ತಾಗಿ ಉಳಿಯದೆ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಬೇಕು. ಆಗ ರಾಷ್ಟ್ರದಲ್ಲಿ ನಿಜವಾದ ಕೃಷಿಪ್ರಗತಿ ಹಾಗೂ ಸಾಮಾಜಿಕ ಕಲ್ಯಾಣ ಮೂಡಿ ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಕಾರ್ಯಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಸಾಹಿತ್ಯ ರಚನೆಯು ಮಹತ್ವದ ಅಂಶವಾಗಿದೆ. ಈ ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾಗುತ್ತಿರುವುದು ಔಚಿತ್ಯಪೂರ್ಣವಾಗಿದೆ.

ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯನಂತರದ ಅಭ್ಯುದಯದ ಹಲವಾರು ಯತ್ನಗಳಲ್ಲಿ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಭಾಷೆಗಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯೂ ಒಂದು. ಹಿಂದಿ ಭಾಷೆಯೊಂದಿಗೇನೇ ಇತರ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳ ಬೆಳವಣಿಗೆ ನಡೆಯಬೇಕೆಂದು ಸಂಸತ್ತು ನಿರ್ಧರಿಸಿದೆ. ಹಲವಾರು ಭಾಷೆಗಳು ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ನಮ್ಮ ರಾಷ್ಟ್ರದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಭಾಷೆಗಳೂ ಸಮತೂಕವಾಗಿ ಬೆಳೆದು ಬಂದಾಗಲೇ ರಾಷ್ಟ್ರದ ಸಮಗ್ರತೆ ಬೆಳೆದುಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಭಾಷೆಗಳು ಸಾಕಷ್ಟು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿದಾಗ ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮಗಳಾಗಲು ಸಮರ್ಥವಾಗುತ್ತವೆ. ನಾಡಿನ ಭಾಷೆಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮಗಳಾಗುವಂತೆ ಬಲಗೊಳಿಸುವ ಹೊಣೆ ವಿವಿಧ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳದ್ದು. ಅದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳು, ಕೃಷಿ ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮಗಳಾಗುವಂತೆ ಸಿದ್ಧತೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ್ದು ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವ ವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳ ಕೆಲಸವಾಗಿದೆ. ನಮ್ಮ ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ಈ ಕಾರ್ಯ ಸಾಧನೆಗೋಸುಗ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಕೃಷಿಸಾಹಿತ್ಯ ನಿರ್ಮಾಣ ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಂಡಿದೆ. ಇಷ್ಟು ದಿನ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿಯೇ ಶಿಕ್ಷಣ ಪಡೆದು, ಬಳಕೆ ನಡೆಯಿಸಿದ ಶಿಕ್ಷಕ ಹಾಗೂ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳಿಗೆ ಒಮ್ಮೆಲೇ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಗ್ರಂಥರಚನೆ ಮಾಡುವುದು ಸುಲಭ ಕಾರ್ಯವೇನಲ್ಲ. ಇಂಥದರಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಲಸ ಪ್ರಾರಂಭವಾದ ಅಲ್ಪಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಮುಕ್ಕಾಲು ಶತಗಳಿಗಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಗ್ರಂಥಗಳು ಪ್ರಕಟಗೊಂಡು ಜನಪ್ರಿಯವಾದುದು ಅತ್ಯಂತ ಹೆಮ್ಮೆಯ ಸಾಧನೆ.

ಉಪಯುಕ್ತ ಸಂಶೋಧನಾಧಾರಿತ ಆಳ ಅಭ್ಯಾಸದ ಫಲವಾಗಿ ಸೃಷ್ಟಿಗೊಂಡ ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಗ್ರಂಥಗಳು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದ ಕೃಷಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಹಾಗೂ ಕೃಷಿಕರಿಗೆ ಅಮೂಲ್ಯ ಕೊಡುಗೆಗಳಾಗುವುದರಲ್ಲಿ ಸಂದೇಹವಿಲ್ಲ. ಈ ಕಾರ್ಯ ಮಿಂಚಿನ ವೇಗದಿಂದ ನಡೆಯಲೆಂದು ನಾನು ಹಾರೈಸುತ್ತೇನೆ.

ಹ. ರಾ. ಅರಕೇರಿ
ಉಪಕುಲಪತಿಗಳು

ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ
ಬೆಂಗಳೂರು
ತಾ॥ 15-3-78

ಸಂಪಾದಕರ ಮಾತು

ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಅನ್ವಯಿತ ವಿಜ್ಞಾನ ಇದಕ್ಕೆ ಎಲ್ಲ ಮೂಲ ವಿಜ್ಞಾನಗಳು ಆಧಾರ ನೀಡುತ್ತವೆ. ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರ ಎಲ್ಲ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳ ಮಾತೆಯೆಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ. ಬೀಜಗಣಿತ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯವಾದ ಸ್ಥಾನ ಪಡೆದಿದೆ.

ಅಮೇರಿಕೆಯ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಸ್ಥಾನಗಳ ಪಾಲ್ ಸಿ. ಶೀಲ್ಡರು ಇಂಗ್ಲಿಷ್‌ನಲ್ಲಿ ಬರೆದ 'ಲೀನಿಯರ್ ಆಲ್ಜಿಬ್ರ' ತುಂಬಾ ಪ್ರಖ್ಯಾತಿಯನ್ನು ಪಡೆದ ಬೀಜಗಣಿತದ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ. ಸ್ನಾತಕಪೂರ್ವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಮನದುಂಬುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಅವರು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಹಲವಾರು ಜಾಗತಿಕ ಭಾಷೆಗಳಿಗೂ, ಭಾರತೀಯ ಅನೇಕ ಭಾಷೆಗಳಿಗೂ ಇದು ಭಾಷಾಂತರಗೊಂಡಿದೆ. ಇಂಥ ಉಪಯುಕ್ತ ಪುಸ್ತಕವು ಕೃಷಿ ಹಾಗೂ ಇತರ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೂ ಪ್ರಯೋಜನವಾಗಲೆಂದು ಅದನ್ನು ಕನ್ನಡಕ್ಕೆ ತರುವ ಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿಯ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರ ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಹಾಗೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಈ ಗ್ರಂಥದ ಪ್ರಯೋಜನವನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವರೆಂದು

ಫಾಲ್ಗುಣ ಮಾಸ, ಪಿಂಗಳನಾಮ ಸಂವತ್ಸರ
ಶಾಲಿವಾಹನಶಕ 1889
ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ
ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು-24

ವೀ. ಚ. ಹಿತ್ತಲಮನಿ
ಕನ್ನಡ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು
ಹಾಗೂ
ಕನ್ನಡ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಸಮಿತಿ
ಕಾರ್ಯದರ್ಶಿಗಳು

ಮೂಲ ಲೇಖಕರ ಮುನ್ನುಡಿ

ಇತ್ತೀಚಿನ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ನಾತಕಪೂರ್ವ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಉನ್ನತಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ಏರಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಗಣಿತವು ಪ್ರಧಾನ ಹಾಗೂ ಅಪ್ರಧಾನ ವಿಷಯಗಳನ್ನಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಂಡ ಇಬ್ಬರಿಗೂ ಅವಶ್ಯವೆನಿಸಿದೆ. ಈ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿಂದಾಗಿ ಅನೇಕ ವಿದ್ಯಾಲಯಗಳು ಸ್ನಾತಕಪೂರ್ವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಈಗ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಕಲಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದೆ. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ಹಾಗೂ ಪ್ರೌಢ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಭಿನ್ನಕಲನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಶ್ರೇಣಿ ಈ ವಿಷಯಗಳಿಗಿಂತ ಬೇರೆಯಾಗಿಯೇ ಕಲಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಪ್ರೌಢ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಭಿನ್ನಕಲನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಬಹುಭಾಗವನ್ನು ಏಕೀಕರಿಸಲು ಮತ್ತು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಅದು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ವಾಸ್ತುಶಿಲ್ಪ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಅಧ್ಯಯನದ ಆರಂಭಕ್ಕೂ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮುಗಿಸಿದ ಕೂಡಲೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಕಲಿಸುವುದು ರೂಢಿಯಲ್ಲಿದೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕವು ಸ್ನಾತಕಪೂರ್ವ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯ ಕ್ರಮಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ರೂಪಿತವಾಗಿದೆ.

ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಬರುವ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಈ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ರೇಖಾತ್ಮಕ ನಿರವಲಂಬನೆ, ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು, ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಮಾಂಗ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿಗೆ ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಮೇಯ ಇವುಗಳ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮೀಕರಣ, ಪೀನಮಧ್ಯ ರೇಖಾಗಣಿತ, ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮಾತೃಕೆಗಳು, ಕ್ಯಾನೊನಿಕಲ್ ರೂಪಗಳು, ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ರೂಪಗಳು ಮತ್ತು ಸಮೂಹ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಇಂಥ ಜನಪ್ರಿಯ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳು ಸಾಧ್ಯ. ಮಾತೃಕೆಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಸರಳವಾಗಿದೆ. ಗಣನಾತ್ಮಕ ಉಪಕರಣಗಳು ಸುಲಭವಾಗಿ ದೊರಕುತ್ತವೆ. ಅಂಥ ಒಂದು ವಿಧಾನವು ವಸ್ತುವಿನ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಕಠಿಣ ಮಾಡುವುದಲ್ಲದೆ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಕ ಬೈಜಿಕ ಪರಿಭಾವನೆಗಳಿಗೂ ಅಡ್ಡಿಯುಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಕಠಿಣ

ವನ್ನಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಅದೆಂದರೆ, ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಮುಖ ಸಾಧಕಗಳನ್ನಾಗಿ ಪರಿಷ್ಕರಿಸುವುದರಿಂದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವುದು. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಅನೇಕ ಹೊಸ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವುದು ಅವಶ್ಯವಾಗಿದೆ. ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಸರಳವಾಗಿದ್ದರೂ ಇದು ಸುಲಭದ ಕೆಲಸವಲ್ಲ. ಕಡೆಗೆ ದೊರೆಯುವ ಫಲಿತಾಂಶವು ಈ ಪ್ರಯತ್ನಕ್ಕೆ ಅರ್ಹವೆನ್ನಬಹುದು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು 'ಆಧುನಿಕ' ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರ ಜೊತೆಗೆ, ಇಂದು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕವಾಗಿರುವ ಅಮೂರ್ತ ಪರಿಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಮಾಡಿ ಕೊಳ್ಳುವುದಲ್ಲದೆ ಉಪಯೋಗಿಸಲೂ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುತ್ತಾನೆ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಕಲಿಯಲು ಸಹಾಯಕವಾಗುವಂತೆ ನಾನಾ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಧಾನಗಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಮೂಲವಾಗಿರುವುದು ನಿಮ್ನ ಆಯಾಮದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಬಲ ವಾದ ಒತ್ತು ಕೊಡುವುದು. ಒಂದು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ನಿಯಮದಂತೆ, ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಜಾಗರೂಕತೆಯ ಪರಿಶೀಲನೆಯ ನಂತರವೇ ಎಲ್ಲ ವಿಷಯ ಗಳನ್ನೂ ಪರಿಚಯಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಇದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ವಿಷಯವನ್ನು ಕಲಿಯಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುವುದಲ್ಲದೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಬಹಳಷ್ಟು ವಿಷಯಗಳು ನಿಮ್ನ ಆಯಾಮದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸುವುದರಿಂದಲೇ ಉದಯಿಸಿದೆ ಎಂಬ ವಿಷಯವನ್ನು ಒತ್ತಿ ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಇದಲ್ಲದೆ ಇಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಲಿಪಿಯಂತೆ ಉಪಯೋಗವಾಗುವ ಅಂಕನದ ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಕನಿಷ್ಠ ಅಂಕನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆಯ ಜಾಡನ್ನು ಹಿಡಿಯಲು ಸಂಕೀರ್ಣ ಅಂಕನ ಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸುವ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ. ಬದಲಾಗಿ, ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸಲು ನಾನಾ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಬಹು ಪದಿಗಳ ಭಾಗಾಹಾರದಂತಹ ಪರಿಚಿತ ವಿಷಯಗಳಿಗೂ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಲಾಗಿದೆ. ಸಾಂದರ್ಭಿಕ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಾಯ 4 ರ 4, 5 ಮತ್ತು 6ನೇ ಭಾಗಗಳಿಗೆ ಹೊರತಾಗಿ ಎಲ್ಲ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನೂ ಕೇವಲ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಸಹಾಯವಾಗಲು, 1 ಮತ್ತು 2ನೇ ಅಧ್ಯಾಯಗಳು ಒಂದೇ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಪ್ರಾಥಮಿಕ ವಿಷಯ, ಅದರ ಹಿಂದೆ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆ, ಅದರ ಹಿಂದೆ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ವಿಷಯ ಹೀಗೆ ಅಧ್ಯಾಯ ಪ್ರಾರಂಭ ವಾಗುವುದು. ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳೊಂದಿಗೆ ಮತ್ತು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ, ನಿರವ

ಲಂಬನೆ ಹಾಗೂ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳಿಗೆ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ. ಅನಂತರ ಮಾತೃಕೆ ಗಣನೆಯ ಕುರಿತು ಒಂದು ದೀರ್ಘವಿಭಾಗ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಅಧ್ಯಾಯ 2, ಪರಿಚಿತ ಬಿಂದು ಗುಣಲಬ್ಧದೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪರಿಚಿತ ನಿರ್ಧಾರಕ ಹಾಗೂ ಓರೆ ಗುಣಲಬ್ಧ ಒಂದು ಚರ್ಚೆಯೊಂದಿಗೆ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಬಹುವಾಗಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ವಿಷಯಗಳ ಮೇಲೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿರುವಾಗ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಲು ಈ ಶ್ರೇಣಿ ಸಾಧ್ಯಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 3 ರ ವಿಷಯವು ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಹೆಚ್ಚು ಕಠಿಣವೂ ಮುಖ್ಯವೂ ಆದ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಗವು ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಜಾಗರೂಕವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಗಣನೆಯ ಸರಳತೆಯನ್ನು ಒತ್ತಿ ಹೇಳುತ್ತದೆ (ಈ ಭಾಗದ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಎರಡು ಆಯಾಮದ ಪ್ರಸಂಗದ ಒಂದು ಸಂಪೂರ್ಣ ಚರ್ಚೆಗೆ ಮೀಸಲಾಗಿವೆ). ಮುಂದೆ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು ಯಾವಾಗ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಬಹುಪದಿಗಳ ಅಭ್ಯಾಸವು ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕುರಿತಾಗಿದೆ. ಬಹುಪದಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಸಂಬಂಧಿತ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು 2 ಮತ್ತು 3ನೇ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಕರ್ಣರೇಖ್ಯತೆಗೆ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಒರೆಗಲ್ಲು ಮತ್ತು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಮಾಂಗ ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಮೇಯ, ಇವನ್ನು ಭಾಗ 4 ರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಅನಂತ ಆಯಾಮಗಳಿಗೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣಗೊಳ್ಳುವ ರೂಪದ ಪ್ರಲಂಬನಗಳ ಪದಪುಂಜದಲ್ಲಿ ವಿರಕವಾಗಿವೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 4, ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಶೀಲ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಬಗೆಗೆ ಭಾಗ 1; ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಬಗೆಗೆ ಭಾಗ 2; ಸಮಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಬಗೆಗೆ ಭಾಗ 3; ಮಿಶ್ರ ಪ್ರಸಂಗದ ಬಗೆಗೆ 4 ರಿಂದ 6ರ ವರೆಗಿನ ಭಾಗಗಳು. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ 4 ರಿಂದ 6ರ ವರೆಗಿನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ 21ರ ನಂತರವೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿದೆ. (ಅಧ್ಯಾಯ 3 ರ ಭಾಗ 4 ರಲ್ಲಿ).

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಮೂರು ವಿಧಗಳಾಗಿವೆ. ಹಲವು ಗಣನಾತ್ಮಕ ವಾಗಿವೆ; ಇವು ಅನೇಕ ಸಲ ಅಲಕ್ಷ್ಯ ಮಾಡಲಾದ ಕುಶಲತೆಯನ್ನು ರೂಢಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ. ಗಣಿತವು ಪ್ರಧಾನ ವಿಷಯವಾಗಿರದ ಅನೇಕರಿಗೆ ಅವಶ್ಯವಿರುವ ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೆ ಇವು ಅವಕಾಶಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತವೆ. ಪಠ್ಯ ಫಲಿತಾಂಶ

ಅಥವಾ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯಬಯಸಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಗ್ರಹಿಸಿರುವಿಕೆಯನ್ನು ಇತರ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಪರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತವೆ. ಮೂರನೆ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಪಠ್ಯದಲ್ಲಿ ಸೇರಿಲ್ಲದ ವಿಷಯವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿವೆ. ಈ ಮೂರೂ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದು ವಿವಿಧ ತರಗತಿಗಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಮಯದ ವಿನಿಯೋಗ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ. ಜೊತೆಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಪರಿಶೀಲನಾ (ಉಜವಳಣೆ) ಅಭ್ಯಸನೆಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸುತ್ತವೆ. ಎಲ್ಲ ಗಣನಾತ್ಮಕ ಅಭ್ಯಾಸಗಳ ಬೆಸಭಾಗಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಎಂದಿನ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲದೆ, 'ಏಳು ವಿಶೇಷ ಅಭ್ಯಾಸ' ಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಪರಿಭಾವನೆಗಳ ಒಂದು ಬಿಡಿ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೇಲೆ ಯೋಚನಾ ಸರಣಿಯನ್ನು ಕಾಪಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಲು ಇವುಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಇಡೀ ತರಗತಿಗೆ ಅಥವಾ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಸ್ಯೆಗೂ ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ವಾರಗಳ ಸಮಯ ಕೊಟ್ಟು ಮಾಡಲು ಕೊಡಬಹುದು.

ಕೆಲವು ಬಹುಮುಖ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ 'ಪ್ರಮೇಯ' ಎಂಬ ಹೆಸರನ್ನೂ, ವಿಷಯದ ಮೂರು ಮೂಲಭೂತ ಉಪಕರಣಗಳಿಗೆ 'ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ' ಎಂಬ ಹೆಸರನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡು ಇತರ ಎಲ್ಲ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ವಿಷಯದ ಕೆಲಭಾಗವನ್ನು 'ಟೀಕೆಗಳು' ಎಂದು ಕರೆದಿರುವ ಪರಿಚ್ಛೇದಗಳಲ್ಲಿ ವಿಂಗಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಪ್ರಧಾನ ಪಠ್ಯದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚೆಯು ಉಚಿತ ಪ್ರವಾಹದಲ್ಲಿ ಸಾಗಿ ಹೋಗುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಸ್ವಲ್ಪ ಸ್ವೇಚ್ಛೆಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಟೀಕೆಗಳು ಗಣನೆ, ಇತರ ಪರಿಭಾವನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧ ಮತ್ತು ಪಠ್ಯ ವಿಷಯದ ವಿಸ್ತರಣೆಗಳು ಇವುಗಳು ಮೇಲೆ ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿವೆ ಮತ್ತು ಇವನ್ನು ಜಾಗರೂಕತೆಯಿಂದ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಬೇಕು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಧ್ಯಾಯದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 'ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು' ಎಂಬ ಹೆಸರಿನ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ವಿಭಾಗವನ್ನು ಒದಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅನೇಕ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳುವುದನ್ನು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಲು ಈ ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅವು ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಪರಿಪೂರ್ಣವಾಗಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸ್ವಾರಸ್ಯ ಕಂಡುಕೊಂಡಿರುವ ಉಲ್ಲೇಖಗಳನ್ನು ಅವು ಒಳಗೊಂಡಿವೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕವು 2 'ಕಾಲುವರ್ಷ' ಅವಧಿಯ ಕಾಲೇಜಿನ ದ್ವಿತೀಯ ವರ್ಷ ಅಥವಾ ಒಂದು 'ಅರ್ಧ ವರ್ಷ' ಅವಧಿಯ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗದ ತರಗತಿಗೆ ಉಪಯುಕ್ತ

ವಾಗುವ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು 'ಅರ್ಧವಾರ್ಷಿಕ' ಕಾಲೇಜಿನ ದ್ವಿತೀಯ ವರ್ಷದ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು 1, 2 ಮತ್ತು 3ನೇ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಾಯ 4 ರ ಭಾಗಗಳನ್ನು (ಇಷ್ಟವಿದ್ದರೆ ಅಧ್ಯಾಯ 2, ಭಾಗ 7ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು) ಮುಗಿಸಲು ಶಕ್ತವಿರಬೇಕು. ಒಂದು 'ಕಾಲು ವರ್ಷ' ಅವಧಿಯ ಕಾಲೇಜಿನ ದ್ವಿತೀಯ ವರ್ಷದ ಅವಧಿಯ ತರಗತಿಯು 1 ಮತ್ತು 2ನೇ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ಮುಗಿಸಲು ಶಕ್ತವಾಗಿರಬೇಕು ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಾಯ 3ರ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಸ್ಕರಣವನ್ನು ಕೊಡಲು ಸಂಸ್ಕರಣವಾಗಬೇಕು. 1 ಮತ್ತು 2ನೇ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಿಂದ ವಿಷಯವನ್ನು ಒಂದು ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಷಯದ ಪೂರಕವಾಗಿಯೂ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳು

ಒಂದು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ಕೇವಲ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯ ಪ್ರಯತ್ನಗಳ ನೇರ ಫಲಿತಾಂಶವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಪುಸ್ತಕವೂ ಅದಕ್ಕೆ ಅಪವಾದವಲ್ಲ. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ನನ್ನ ಮೊದಲ ಬೋಧನೆಯಲ್ಲಿ ಸಹಾಯಕರಾಗಿದ್ದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು ಆರ್ಥರ್ ಮೆಟಕಾ ಮತ್ತು ಕೆನತ್‌ಹಾಫ್‌ಮೆನ್ ಅವರುಗಳಿಗೆ ನಾನು ಕೃತಜ್ಞನಾಗಿದ್ದೇನೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಯನ್ನು ಓದಿದ ಮತ್ತು ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿರುವ ಅನೇಕ ಅಮೂಲ್ಯ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಪಾಧ್ಯಾಪಕರುಗಳಾದ ಲಿನ್. ಎಚ್. ಲೂಮಿಸ್ ಮತ್ತು ಮೀರಾಬರ್ಟ್‌ರಿಲೆ ಅವರಿಗೆ ನಾನು ಬಹುವಾಗಿ ಋಣಿಯಾಗಿದ್ದೇನೆ. ಹಸ್ತಪ್ರತಿಯನ್ನು ಟೈಪ್ ಮಾಡಿದುದಕ್ಕಾಗಿ, ಕರಡು ತಿದ್ದಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡಿದುದಕ್ಕಾಗಿ, ಚಿತ್ರಗಳಿಗೆ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ರೂಪರೇಖೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದುದಕ್ಕಾಗಿ ಮತ್ತು ಅನಿವಾರ್ಯವಾದ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಗಂಟೆಗಳ ಕಾಲ ಶ್ರಮವಹಿಸಿದುದಕ್ಕಾಗಿ ನನ್ನ ಪತ್ನಿ ಡೊರೊತಿಗೆ ಅನಂತ ಧನ್ಯವಾದಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಕರಡು ತಿದ್ದಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡಿದ ಮಿಸ್ ಮೇಟಲ್‌ಬ್ಲಾಕ್ ಅವರಿಗೂ ಧನ್ಯವಾದಗಳು ಸಲ್ಲಬೇಕಾಗಿವೆ.

ಆಗಸ್ಟ್ 1963
ಆನ್‌ಆರ್ಬರ್, ಮಿಚಿಗನ್

ಪಾಲ್ ಸಿ. ಶೀಲ್ಡ್ಸ್

ಪರಿವಿಡಿ

ಅಧ್ಯಾಯ 3 ಬಿಡಿರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ

ಅಧ್ಯಾಯ 4 ಸಂಕೀರ್ಣ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಮತ್ತು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಪ್ರಸಂಗ

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತ

ಒಪ್ಪೋಲೆ

ಪುಟ-ಸಾಲು	ತಪ್ಪು	ಸರಿ
74-13	ಕ್ಲೀಪ್ತತೆ	ಕ್ಲೃಪ್ತತೆ
120-15	ಅಧಾರ	ಆಧಾರ
123-14	$dtmV > dtmW$	$dimV > dimW$
136-15	ಬದಲಾವಣೆಗಳು	ಬದಲಾವಣೆಗಳ
159-2	$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ xn \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ xn \end{bmatrix}$
177-9	(Crout)ಕ್ರೌಟ್	ಕ್ರೌಟ್(Crout)
184-9	$\frac{1}{4}\|v_1 + \frac{1}{4}v_2\|^2$	$\frac{1}{4}\|v_1 + v_2\|^2$
186-10	$X+,$	$X,$
238-18	$(TX^2, \quad)$	$(TX^2 \cdot Y)$
244-26	ಅಧ್ಯಾಯ.	ಅಧ್ಯಾಯ 1,
259-5	$de \; (A)$	$det(A)$
315-7	ಜಿಸ್ತ	ಸ್ವಸ್ತ
417-17	a ಒಂದು	aಒಂದು
452-16	(x, y, z)	$(x, y, -z)$
460-21	$y_2 = 2e^2t \times e^1t$	$y' = 2e^2t + e^1t$
466-25	$26t$	$26t^{\circ}$
471-14	Isomorphison	Isomorphism

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಮೂಲಭೂತ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು

ಭಾಗ 1. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳು

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಓದುಗನಿಗೆ ಚಿರಪರಿಚಿತವಾದ ವಿಧಾನವೊಂದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ರೇಖಾ ಬೀಜಗಣಿತದ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ಪರಿಹಾರಗಳ ಅಸ್ತಿತ್ವ ಮತ್ತು ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ ನಿಖರ ಸೂತ್ರಾಚರಣೆಯೊಂದನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಇಲ್ಲಿನ ಉದ್ದೇಶ.

ಕೆಳಗಿರುವ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ

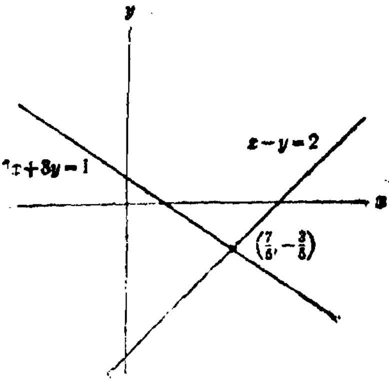
(1)
$$2x + 3y = 1$$
$$x - y = 2$$

ವ್ಯೂಹ(1)ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣವೂ ಸಾಧಾರವೆನಿಸುವಂತಿರುವ x ಮತ್ತು y ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಿಯೊಂದು ಈ ವ್ಯೂಹಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $x = \frac{7}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ, ಆದರೆ $x = 3$, $y = 1$ ಎನ್ನುವುದು ಪರಿಹಾರವಲ್ಲ. ಸಾಧಾರಣ ಸಮತಲದ ಆಯತ ಸ್ಥಾನ ನಿರ್ದೇಶಕ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ, ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣವೂ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ. ಈ ರೇಖೆಗಳು $x = \frac{7}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರುತ್ತವಾದ್ದರಿಂದ ಇದೊಂದೇ ಸಮೀಕರಣ(1)ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರ 1 ನೋಡಿರಿ).

(1)ರ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು **ರೇಖಾತ್ಮಕ** ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. ಅರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹದ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯು ಹೀಗಿರುವುದು :

$$2x^2 + 3y = 1$$
$$x - xy = 2$$

ಈ ವ್ಯೂಹದ ಮೊದಲ ಸಮೀಕರಣವು ಒಂದು ಪರವಲಯವನ್ನೂ, ಎರಡನೆಯದು ಒಂದು ಅತಿಪರವಲಯವನ್ನೂ ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಚರಾಂಕಗಳನ್ನು, ಘಾತಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿವೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಗಮನವನ್ನು (1)ರಂಥ ರೇಖಾತ್ಮಕ ವ್ಯೂಹಗಳ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ – 1

ಮೂರು ಅಜ್ಞಾತಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹದ ಅತ್ಯಂತ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು ಈ ರೀತಿ ಇದೆ:

$$(2) \qquad \begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ ex + fy + gz &= h \end{aligned}$$

ಇದರಲ್ಲಿ a, b, c, d, e, f, g, h ಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು x, y ಮತ್ತು zಗಳ ಪರಿಹಾರವೊಂದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. n ಅಜ್ಞಾತಗಳ m ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅತ್ಯಂತ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯೂಹಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಅನುಕೂಲವಾದ ಅಂಕನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ. ಅಜ್ಞಾತಗಳನ್ನು x_1, x_2, ..., x_n ಗಳಿಂದ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ಗಳಿಂದ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸೋಣ. ಅಡಿಬರಹದ್ವಯವೊಂದನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ; ಅಂದರೆ ಮೊದಲನೆಯ ಅಡಿಬರಹವು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಅಡಿಬರಹವು ಅಜ್ಞಾತಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲಿ. ಈ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ನಾವು ವ್ಯೂಹ (2)ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮತ್ತೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 &= y_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 &= y_2 \end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ n ಅಜ್ಞಾತಗಳ m ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅತ್ಯಂತ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೇಖಾತ್ಮಕ ವ್ಯೂಹದ ರೂಪವು ಮುಂದಿನಂತಿರುತ್ತದೆ:

$$
(3) \quad \begin{aligned}
&A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n = y_1 \\
&A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n = y_2 \\
&\vdots \\
&A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n = y_m
\end{aligned}
$$

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ವ್ಯೂಹ (3)ರ **ಸಹಗುಣಕಗಳೆಂದು** ಕರೆಯಲಾಗುವ A_{11}, $A_{12}, \ldots, A_{1n}, A_{21}, A_{22} \ldots, A_{2n}, \ldots, A_{m1}, A_{m2}, \ldots, A_{mn}$ ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವ್ಯೂಹ (3)ರ **ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳೆಂದು** ಕರೆಯಲಾಗುವ $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ಅಂಕಗಳು ಕೊಡಲಾಗಿರುತ್ತವೆ. (3)ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣವೂ ಸಾಧಾರವಾಗಿರುವಂತೆ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಂದು ಗಣ, ಎಂದರೆ, ವ್ಯೂಹ (3)ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣವೂ ಸಾಧಾರವಾಗುವಂಥ ಒಂದು ಗುಣ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ವು (3)ಕ್ಕೆ ಒಂದು **ಪರಿಹಾರವೆಂದು** ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ವ್ಯೂಹ (3)ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಹುಡುಕಲಾಗುವುದು.

ವ್ಯೂಹ (1)ನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಲಾಯಿತು ? ಒಂದು ಸುಲಭ ವಿಧಾನವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ. ನಾವು ವ್ಯೂಹ(1)ರ ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದದ್ದನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ

(4) $5x = 7, \quad x-y = 2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು -5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಬಂದದ್ದನ್ನು ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸುತ್ತೇವೆ :

(5) $5x = 7, \quad -y = \frac{3}{5}$

ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು 5 ರಿಂದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು —1 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

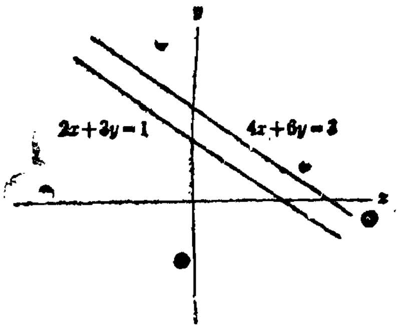
(6) $x = \frac{7}{5}, \; y = -\frac{3}{5}$

ಚಿತ್ರ 1 ರಿಂದ ವ್ಯೂಹ (1)ಕ್ಕೆ ಇದೊಂದೇ ಪರಿಹಾರವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ವಿಧಾನ ಹೀಗಿದೆ: ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದದ್ದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಕೂಡುವುದು ಅಥವಾ ಕೇವಲ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದು, ಪರಿಹಾರ

ದೊರಕುವ ತನಕ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಅಜ್ಞಾತಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸುತ್ತಾ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವುದು. ಯಾವ ಪರಿಹಾರವೂ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ಈ ವಿಧಾನ ಪ್ರಯೋಜನಕಾರಿಯಾಗಿಯೇ ಇದೆ; ಏಕೆಂದರೆ ಆಗ ಅದು ಸಾಧಾರವೇ ಆಗದಂಥ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಗತಿಗೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯು **ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ :**

(7) $$2x + 3y = 1$$
$$4x + 6y = 3$$

ಈ ವ್ಯೂಹವು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ; ಆದ್ದರಿಂದ ಅವು ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. (ಚಿತ್ರ 2 ನೋಡಿರಿ) ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು −2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಬಂದದ್ದನ್ನು ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸಿದಲ್ಲಿ



ಚಿತ್ರ – 2

(8) $$2x - 3y = 1$$
$$0 = 1$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(8)ರ ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣವು ಎಂದಿಗೂ ಸಫಲವಾಗಲಾರದು.

ಹೀಗೆ ಅಪಛೇದನೆಯ ಜ್ಯಾಮಿತಿಕ ಸಂಗತಿಯು ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ನಾವು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಅಸಂಬದ್ಧವನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಇದು (3)ರಂಥ ವ್ಯೂಹದ ಬಗ್ಗೆ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೇಳುವಂತೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಮೊದಲನೆಯದು: ಒಂದು ಪರಿಹಾರವು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುವುದೇ ? ಎರಡನೆಯದು: ಪರಿಹಾರವು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುವುದಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು ? ಈ ವಿಧಾನವು ಈ ಎರಡೂ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನೂ ಉತ್ತರಿಸುವುದು.

ಕನಿಷ್ಟ ಒಂದಾದರೂ ಪರಿಹಾರವು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಮುಂದಾಗಿಯೇ ತಿಳಿದಿರುವ ಒಂದು ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸೋಣ. ವ್ಯೂಹ (3)ರಲ್ಲಿ, $y = y_2 = \dots = y_m = 0$ ಆಗಿರುವ ಸಂದರ್ಭವೇ ಇದು. ಏಕೆಂದರೆ ಇದು ನಿಜವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ ಇದ್ದು, ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ವ್ಯೂಹ (3)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ. $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$ ಇರು

ವಂಥ ಒಂದು ವ್ಯೂಹ(3)ನ್ನು **ಸಮಘಾತವ್ಯೂಹ**ವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಪರಿಹಾರ ಇಂತಿದೆ :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x = 0_n$$

ಇದನ್ನು ಒಂದು **ಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಮಘಾತ ವ್ಯೂಹಗಳ ಮೇಲೆ ನಮ್ಮ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸೋಣ. ಅಂಥ ವ್ಯೂಹಗಳಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತಿಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಕೇವಲ **ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರಗಳ** ಅಸ್ತಿತ್ವ ಮತ್ತು ಗುಣಧರ್ಮಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ, ಕೆಳಗಿರುವಂತೆ **ಎಲ್ಲವೂ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ** $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ಅನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

$$(9) \qquad \begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= 0 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

ಈ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ :

$$(10) \qquad \begin{aligned} 3x + 2y - z &= 0 \\ x - 3y + z &= 0 \\ 8x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು -3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ ; ಫಲಿತವನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸಬೇಕು :

$$(11) \qquad \begin{aligned} 11y - 4z &= 0 \\ x - 3y + z &= 0 \\ 8x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು -8 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು ; ಫಲಿತವನು ಮೂರನೆಯ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸಬೇಕು :

$$(12)\qquad \begin{aligned} 11y-4z&=0\\ x-3y+z&=0\\ 22y-8z&=0 \end{aligned}$$

ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು 11 ರಿಂದ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು 22 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಆಗ ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಾಮ್ಯಕವಾಗುತ್ತವೆ. ಮೂರನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು −1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದದ್ದನ್ನು ಒಂದನೆಯ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಒಂದನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಬಹುದು :

$$(13)\qquad \begin{aligned} 0&=0\\ x-3y+z&=0\\ y-\tfrac{4}{11}z&=0 \end{aligned}$$

ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣವು ಈಗ ಅತಿ ಸಮೃದ್ಧಿಯಾಗಿದೆ. ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದೆವೆನ್ನುವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಮಾತ್ರ ಅದನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಮೂರನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು −3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು; ಬಂದದ್ದನ್ನು ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸಬೇಕು :

$$(14)\qquad \begin{aligned} 0&=0\\ x-3y+z&=0\\ y-\tfrac{4}{11}z&=0 \end{aligned}$$

ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬೇಕಾದದ್ದು ಇದು. ಈಗ zಗೆ ಒಂದು ನಿಷ್ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು, x ಮತ್ತು yಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು (14)ರಿಂದ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ, ಹೀಗೆ ವ್ಯೂಹ(10)ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ದೊರಕಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $z=1$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಮತ್ತು $x=\frac{1}{11}$, $y=\frac{4}{11}$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು ಅಥವಾ $z=11$ ಎಂದು ಮತ್ತು $x=1$, $y=4$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. $[x=\frac{1}{11}, y=\frac{4}{11}, z=1]$ ಅಥವಾ $[x=1, y=4, z=11]$ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣವೂ ವ್ಯೂಹ (10)ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ. $z=0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಬಿಟ್ಟರೆ, zನ ಯಾವುದೇ ಆಯ್ಕೆಯು (10)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಜ್ಯಾಮಿತಿಕವಾಗಿ, ವ್ಯೂಹ (10)ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣವೂ ಒಂದು ಸಮತಲ

ವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮತಲಗಳು (14) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಪ್ರಸಕ್ತ ನಿಯತಾಂಕಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದೇ

$x = t/11$, $y = 4t/11$, $z = t$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

ನಾವು ಕೇವಲ ವ್ಯೂಹ (10)ರ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮೇಲೆ, ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅವನ್ನು (11), (12), (13) ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದಾಗಿ (14)ರ ಸಹಗುಣಕಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತ ಪರಿಕರ್ಮಿಸಿದೆವೆಂದು ಲಕ್ಷಿಸುವುದರಿಂದ ನಾವು ನಮ್ಮ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಬಹುದು. ಯಾವ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಯಾವ ಚರಾಂಕಗಳೊಡನೆ ಹೋಗುತ್ತವೆಂಬ ಜಾಡನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಸಾಧನವೊಂದೇ ನಮಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿರುವುದು. ಇದನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದು :

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಒಂದು **ಮಾತೃಕೆಯು** ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ವಿನ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ,

$$(15) \qquad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

ಮೇಲಿರುವುದು ಒಂದು ಮಾತೃಕೆ. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು i ಮತ್ತು j ಗೂ Aij ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

ಟೀಕೆ: Aijಯ ಮೊದಲನೆಯ ಅಡಿಬರಹವು Aij ದಾಖಲಾತಿಯು ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ **ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ** ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಅಡಿಬರಹವು Aij ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ **ನೀಟಸಾಲಿಗೆ** ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಮಾತೃಕೆಯು m ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು n ನೀಟಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ನಾವು ಅದನ್ನು $m-n$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಮಾತೃಕೆಯ **ಗಾತ್ರ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮಾತೃಕೆಯ ಗಾತ್ರವು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾವು (15)ರ ಸಂಕೇತಗಳ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಕೇತವಾದ (Aij) ಯನ್ನು ಹಾಕುತ್ತೇವೆ. ಬಹಳ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತೃಕೆಯ ದಾಖಲುಗಳನ್ನೂ ಗಮನಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು A ಯಂಥ

ಒಂದು ಬಿಡಿ ಅವ್ಯಕ್ತಾಕ್ಷರದಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗುವುದು. (ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ವರ್ಣಮಾಲೆಯ ಆದಿಭಾಗದ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸಲಾಗುವುದು.)

$A = (A_{ij})$ಯು $m-n$ ಗಾತ್ರದ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು A_{ij} ದಾಖಲಾತಿಗಳೂ (3) ರಂಥ ವ್ಯೂಹವೊಂದರ ಸಹಗುಣಕಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ನಾವು Aಯು (3)ರ **ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆ** ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ Aಯು ವ್ಯೂಹ (3)ರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ Aಯ i ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು j ನೀಟಸಾಲಿನ ದಾಖಲಾತಿಯು, (3)ರ i ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿಯ j ಚರಾಂಕದ ಸಹಗುಣಕದೊಂದಿಗೆ ಸಂವಾದಿಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವ್ಯೂಹ(10)ರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯು ಕೆಳಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 8 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ಈ ಮಾತೃಕೆಯು 3 + 3 ಆಗಿದೆ. (7)ರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯು

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

2×2 ಆಗಿದೆ.

ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಒಂದು ವ್ಯೂಹದ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯು ಯಾವ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಯಾವ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಸೇರಿದ್ದವೆಂಬ ಜಾಡನ್ನು ಹಿಡಿದಿಡುವ ಒಂದು ಅನುಕೂಲಕರ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ. ಚರಾಂಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಬದಲು, ಕೇವಲ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಬರೆದುಬಿಡುತ್ತೇವೆ. ಸಮಘಾತದ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಮಾತೃಕೆಯು ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ. (2ನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಸಮಘಾತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿ ವಿವರಿಸುವಂಥ ಮತ್ತೊಂದು ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.) (11)ರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿರುತ್ತದೆ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 11 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 8 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ವ್ಯೂಹ (11)ನ್ನು, ವ್ಯೂಹ (10)ರ ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು −3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಬಂದದ್ದನ್ನು ವ್ಯೂಹ (10)ರ ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆದೆವು. ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 8 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ಯಿಂದ,} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 8 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ಯನ್ನು}$$

B ಯ ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದಾಖಲನ್ನು −3ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು Aಯ ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅನುಗುಣವಾದ ದಾಖಲಾತಿಗೆ ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಹಾಗೆಯೇ (12)ಕ್ಕೆ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು Aಯ ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದಾಖಲನ್ನೂ −8ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು Aಯ ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅನುಗುಣವಾದ ದಾಖಲಾತಿಗೆ ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಇದು ಮೂಲಭೂತ ಪರಿಕರ್ಮವಾಗಿದೆ. ಮಾತೃಕೆಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ i_0 ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದಾಖಲಾತಿಯನ್ನೂ ಅದಕ್ಕೆ ಮತ್ತೊಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ, ಅದನ್ನು i, ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ, ಅನುಗುಣವಾದ ದಾಖಲಾತಿಯ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಗುಣಕವನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ವ್ಯೂಹ (12) ರಿಂದ ವ್ಯೂಹ (13)ಕ್ಕೆ ಚಲಿಸುವಾಗ ಎರಡನೆ ಬಗೆಯ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ಬಳಸಿದೆವು; ನಾವು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದಾಖಲಾತಿಯನ್ನೂ ಆ ದಾಖಲಾತಿಯ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಅಶೂನ್ಯ ಗುಣಕದಿಂದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸಿದೆವು. (ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದಾಖಲನ್ನೂ o ಯಿಂದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸಿದರೆ, ನಾವು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದಾದುದರಿಂದ, 'ಅಶೂನ್ಯ' ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವು ಅವಶ್ಯವಾಗಿದೆ). ಈ ಪರಿಕರ್ಮಗಳಲ್ಲಿ, ದಾಖಲಾತಿಗಳನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸುವುದು ಸ್ವಲ್ಪಮಟ್ಟಿಗೆ ಹೊರೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಕಾರಣಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಲಿಪಿಯ ಸಂಪ್ರದಾಯವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು **ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮವು** ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದಾಖಲಾತಿಯ ಮೇಲೆ ನಡೆಸುವ ಪರಿಕರ್ಮವಾಗಿದೆ. ಈ ಸಂಕೇತದೊಡನೆ ಎರಡು ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು: $i_1 \neq i_0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ii ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಗುಣಕವೊಂದನ್ನು i_0 ಅಡ ಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿ. $a \neq o$ ದಿಂದ i ಸಾಲನ್ನು ಗುಣಿಸಿರಿ.

ಮೂರನೆಯ ಪರಿಕರ್ಮವು ಗಣನಾತ್ಮಕ ಮೌಲ್ಯವನ್ನೇನೂ ಹೊಂದಿಲ್ಲವಾದರೂ, ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸಲು ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ತಾಂತ್ರಿಕ ಸಾಧನವಾಗಿದೆ. ಇದು ಹೀಗಿದೆ : ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿರಿ. ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅನುಕೂಲವಾದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಈ ಪರಿಕರ್ಮವು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಬರೆಯೋಣ. ನಾವು ವ್ಯೂಹ (10)ನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಯಿಂದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$(16)\qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 8 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ನಾವು ಇದರ ಎರಡನೇ ಸಾಲನ್ನು -3ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದದ್ದನ್ನು ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$(17)\qquad \begin{bmatrix} 0 & 11 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 8 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ಅಂದರೆ, ಇದು ವ್ಯೂಹ (11)ರ ಸಹ ಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆ.

ಇದರ ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು -8ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದದ್ದನ್ನು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

$$(18)\qquad \begin{bmatrix} 0 & 11 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 22 & -8 \end{bmatrix}$$

ಅಂದರೆ, ಇದು ವ್ಯೂಹ (12)ರ ಮಾತೃಕೆ.

ನಾವು ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು $\frac{1}{11}$ ರಿಂದ ಮತ್ತು 3ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು $\frac{1}{22}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$(19)\qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{4}{11} \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} \end{bmatrix}$$

ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು -1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಬಂದದ್ದನ್ನು ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

(20) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} \end{bmatrix}$$ ಅಂದರೆ ಇದು ವ್ಯೂಹ (13) ರ ಮಾತೃಕೆ.

ಅನಂತರ ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು 3ರಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಬಂದದ್ದನ್ನು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿ, ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

(21) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} \end{bmatrix}$$

(21) ಮಾತೃಕೆಯು ವ್ಯೂಹ (14)ರ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು 21ರಿಂದ ಸಾವು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಓದಬಹುದು. ವ್ಯೂಹ (10)ರ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ವಿಸರ್ಜಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು (21) ರ ಶೂನ್ಯಗಳ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಸೂಚಿಸುತ್ತದಷ್ಟೇ. ಈ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಕೆಳಗೆ ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದು ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿದೆ. (21)ರ ಒಂದನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ಅನಂತರ ಈ ಹೊಸ ಮಾತೃಕೆಯ ಒಂದನೇ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಇದು ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿರುವ ಅನುಕೂಲಕರ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ

(22) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ಗಣನಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಅಂತಹ ಅದಲು ಬದಲನ್ನು ಎಂದಿಗೂ ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ. ಹೇಗಾದರೂ, ಮಾತೃಕೆ (22)ರ ರೂಪವು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸುವಾಗ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಇನ್ನೂ ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ವಿಧಾನವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರಬೇಕು. ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಿ, ಅನಂತರ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದದ್ದನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಕೆಲವು ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಬೇಕು. ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಒಂದು ಅಶೂನ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಪ್ರಧಾನ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬೇಕು. (22) ರಂಥ

ರೂಪವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಓದಬೇಕು. ಈ ಅಂತಿಮ ರೂಪದ ಗುಣ ಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಇನ್ನೆರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ

(23)
$$x+3y=o$$
$$2x+6y+4z=o,$$

ಈ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಿರಿ.

(24)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು −2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ ; ಬಂದದ್ದನ್ನು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

(25)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು $\frac{1}{4}$ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ :

(26)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ಇದೇ ಈ ಕೆಳಗಿರುವುದರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

(27)
$$x+3y=o, \quad z=o.$$

ನಾವು yಗೆ ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನಾದರೂ ಕೊಟ್ಟು, ಅನಂತರ (27)ರಿಂದ x ಮತ್ತು zಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು (z ಶೂನ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು) ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ಇದು ವ್ಯೂಹ (23)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ :

(28)
$$3x+2y-z=o$$
$$x-y+2z=o$$
$$x+y-6z=o.$$

ಇದರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ :

$$(29) \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು -3ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ. ಬಂದದ್ದನ್ನು ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅನಂತರ ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು -1ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ, ಬಂದದ್ದನ್ನು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ :

$$(30) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು $\frac{1}{2}$ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ, ಅದರಿಂದ ಬರುವ ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು -5ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ. ಅದನ್ನು ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅನಂತರ 1ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ :

$$(31) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು $\frac{1}{13}$ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ, ಅದರಿಂದ ಬರುವ ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು 2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅನಂತರ ಬರುವ ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು 4ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ :

$$(32) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ಒಂದನೇ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು, ಅನಂತರ ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿರಿ :

(33)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ಇದೇ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

(34) $$x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

(28) ಕೇವಲ ಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು (34)ರಿಂದ ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. (22), (26) ಮತ್ತು (33) ಮಾತೃಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲದರಲ್ಲಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದುದು ಏನು? ಅತ್ಯಂತ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಸಂಗತಿಯೆಂದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯೂ ಮೊದಲನೇ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯು 1 ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಈ 1 ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಇತರ ಎಲ್ಲಾ ದಾಖಲಾತಿಗಳು ಶೂನ್ಯಗಳಾಗಿವೆ. ಹೀಗೆ (22)ರಲ್ಲಿ ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪ್ರಧಾನ ಸಹಗುಣಕವು 1 ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅನುಗುಣವಾದ ಅಜ್ಞಾತವನ್ನ ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ವಿಸರ್ಜಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪ್ರಧಾನ ಸಹಗುಣಕವು ಸಹ 1 ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅನುಗುಣವಾದ ಅಜ್ಞಾತವನ್ನು ಒಂದನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ವಿಸರ್ಜಿಸಿದ್ದೇವೆ. (26)ರಲ್ಲಿ ಒಂದನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ xನ ಸಹಗುಣಕವು 1 ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ x ಅನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದೆವು. ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮೊದಲನೇ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯು ಮೂರನೇ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ, x ಅನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸುವ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನದಲ್ಲಿ, ನಾವು y ಅನ್ನೂ ಕೂಡ ವಿಸರ್ಜಿಸಿದೆವು.

ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲನೇ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯು, (22), (26), ಮತ್ತು (33)ರಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲನೇ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯ ಎಡಕ್ಕಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. (22)ರಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯಗಳ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಕೆಳಗಿದೆ ಮತ್ತು (33)ರಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲನೇ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲನೇ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯ ಎಡಕ್ಕಿದೆ. ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮತ್ತು ಇದು ನಮಗೆ ತಾತ್ವಿಕವಾಗಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪುನರಾವರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ, ಹಿಂದಿನ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಗತಿಗಳು ಅವಶ್ಯಕ.

ಇಲ್ಲಿ ಅಶಿಸುವ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕರೂಪವು **ಸಂಕ್ಷೋಚಿಸಿದ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸೋಪಾನ ವ್ಯೂಹ ರೂಪ** ಎಂದು ಅಥವಾ ಇನ್ನೂ ಸರಳವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ **ಸೋಪಾನ ವ್ಯೂಹ ರೂಪ**ವೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ **ಸೋಪಾನ ವ್ಯೂಹ**ವೆನ್ನಬೇಕಾದರೆ :

(*a*) Rನ ಎಲ್ಲ ಶೂನ್ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳೂ Rನ ಅತ್ಯಂತ ಕೆಳಗೆ ಇರುತ್ತವೆ (ಅಂದರೆ, ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಗಳಿಂದಲೇ ಆಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಡ್ಡ ಸಾಲೂ, ಯಾವುದೇ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಗಳಿಂದ ಕೂಡಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಕೆಳಗೆ ಇರುತ್ತದೆ).

(*b*) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮೊದಲನೇ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ (ಅಂದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರಧಾನ ಸಹಗುಣಕವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ).

(35) (*c*) i ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲನೇ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯು k_i ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಂಡರೆ, ಆಗ, k_i ನೀಟಸಾಲಿನ ಇತರ ಎಲ್ಲ ದಾಖಲಾತಿಗಳೂ ಶೂನ್ಯಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ (ಅಂದರೆ, i ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x_{ki} ಮೊದಲನೇ ಚರಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ x_{ki}ಯು ಇನ್ನಿತರ ಎಲ್ಲಾ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದಲೂ ವಿಸರ್ಜಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ).

(*d*) ಅಶೂನ್ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು r ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $k_1 < k_2 < \ldots < kr$ (ಅಂದರೆ, i ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯು $i+1$ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮೊದಲನೇ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯ ಎಡಕ್ಕಿರುತ್ತದೆ).

ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ (b) ಮತ್ತು (c) ಭಾಗಗಳು ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕವಾದವುಗಳ (a) ಮತ್ತು (d) ಭಾಗಗಳು ನಂತರದ ಪರಿಣಾಮಗಳು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸ್ಥಾಪಿಲ್ಪಡುವಂತೆ ಮಾಡುತ್ತವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಪ್ರಮೇಯವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರಬೇಕು. ಇದ ಸಾಧನೆಯು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆಯು ಜಾಡನ್ನು ಒಡಿದಿಡುವ ಕೇವಲ ಜಮಾಖರ್ಚು ರೀತಿಯ ಸಾಧನಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುವುದರಿಂದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೈ ಬಿಡುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 1. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಘಾತವ್ಯೂಹವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
&A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}z_n = o\\
&A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n = o\\
&\vdots\\
&A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n = o,
\end{aligned}
$$

$A = (Aij)$ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಿರಿ. ಒಂದು ಸಂಕೋಚಿಸಿದ ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆ Rಅನ್ನು ಪಡೆಯಲು Aಯ ಮೇಲೆ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿರಿ. ಆಗ ವ್ಯೂಹ (9)ರ ಪರಿಹಾರಗಳೂ ಕೆಳಗಿನದರ ಪರಿಹಾರಗಳೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

$$
(36)\qquad
\begin{aligned}
&R_{11}x_1 + R_{12}x_2 + \dots + R_{1n}x_n = o\\
&R_{21}x_1 + R_{22}x_2 + \dots = R_{2n}x_n = o\\
&\vdots\\
&R_{m1}x_1 + R_{m2}x_2 + \dots + R_{mn}x_n = o
\end{aligned}
$$

(36)ರ Rನಂಥ ಒಂದು ಸಂಕೋಚಿಸಿದ ಸೋಪಾನ ವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆಯ ವಿಶಿಷ್ಟ ಗುಣಧರ್ಮವು ನಮ್ಮ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದೆಂಬುದು ಅತ್ಯಂತ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. Rನ ಮೇಲಿನ ವಿವರಣೆಯಿಂದ ನಮಗೆ ತಿಳಿದು ಬರುವುದೇನೆಂದರೆ, ಅಶೂನ್ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು r ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು i ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮೊದಲನೇ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯು K_i ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಂಡರೆ, ಆಗ K_i

ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಇನ್ನಿತರ ಎಲ್ಲಾ ದಾಖಲಾತಿಗಳೂ ಶೂನ್ಯಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು $K_1 < K_2 < \ldots\ldots < K_r$ ಪ್ರತಿಯೊಂದು K_iಯೂ ಒಂದು ನೀಟಸಾಲಿನ ಅಡಿ ಬರಹವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ನಾವು ಹೊಂದಿರುವುದು $I \leq K_1 \geq K_2 < \ldots\ldots \leq K_r \geq n$ $r \lesseqgtr n$ ಎಂದುಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ನಾವು $I < k_1 < k_2 < \ldots < k_r < n$ ಆಗಿರುವಂತೆ r ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\{k_1, k_2 .. k_r\}$ ಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು ? $r > n$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಇದನ್ನು ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಮತ್ತು $r = n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದೇ ವಿಧದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಮಾಡಬಹುದು, ಅದೆಂದರೆ $k_i = i$ (ಹೀಗೆ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ $n = 3$ ಮತ್ತು $r = 4$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $I \leq k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \leq 3$ ಆಗಿರುವಂತೆ ನಾವು $\{1,2,3\}$ ಗಳಿಂದ k_1, k_2, k_3, k_4 ಗಳನ್ನು ಆರಿಸಲಾರೆವು $r = 3$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 = 3$ ಆಗಿರುವುದು k_1, k_2, k_3 ಗಳನ್ನು $\{1, 2, 3\}$ ಗಳಿಂದ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಒಂದೇ ವಿಧಾನವೆಂದರೆ $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3$ ಆಗಿದೆ.) ಹೀಗೆ $r = n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $k_i = 1$, ಅಂದರೆ, (36) ರ i ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲನೇ ಅಶೂನ್ಯದಾಖಲಾತಿಯು x_iನ ಸಹಗುಣಕವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದು 1 ಆಗಿದೆ. ಈ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಇನ್ನಿತರ ಎಲ್ಲ ದಾಖಲಾತಿಗಳೂ ಶೂನ್ಯಗಳಾಗಿವೆ, ಅಂದರೆ x ಅನ್ನು ಇನ್ನಿತರ ಎಲ್ಲ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದಲೂ ವಿಸರ್ಜಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆಗ (36) ಹೀಗಾಗುತ್ತದೆ,

$$
(37) \qquad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ &\vdots \\ x_n &= 0 \end{aligned}
$$

$n = 3$ ಮತ್ತು $r = 3$ ಆಗಿರುವ (33) ರಲ್ಲಿ ಇದೇ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಇದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಾವು ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ, ಅದೆಂದರೆ ಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರ.

$r < n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, R ಅನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಪರಿಕರ್ಮಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನವಲಂಬಿಸಿ ಪ್ರತಿ k_i ಗೂ ಅನೇಕ ಆಯ್ಕೆಗಳಿವೆ ಎಂದು ತೋರಬಹುದು. ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆ Aಗೆ ಇಲ್ಲಿನ ವಿಧಾನವು

ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದೇ ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆ R ನ್ನು ದೊರಕಿಸುವುದೆಂಬು ದನ್ನು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಈ ಪರಿಣಾಮವನ್ನು ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಅಭ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬಿಡಲಾಗುವುದು. i ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲನೇ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯು ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ನೀಟಸಾಲಿನ ಅಡಿಬರಹ ki ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ i ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿರುವ Xk_i ನ ಸಹಗುಣಕವು 1 ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು Xk_i ಇನ್ನಿತರ ಎಲ್ಲ ಸಮೀಕರಣ ಗಳಿಂದ ವಿಸರ್ಜಿತವಾಗಿದೆ. (36) ರ ವಿವರಣೆಯೊಂದನ್ನು ದೊರಕಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಅಂಕನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸೋಣ $xk_1, xk_2, \ldots xkr$ಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರದಿರುವ ಚರಾಂಕಗಳನ್ನು $u_1, u_2 \ldots u_{n-r}$ ಗಳು ಸೂಚಿಸಲಿ. cij ಯು (36) ರ i ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ u_j ಯ ಸಹಗುಣಕವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ. ಆಗ ನಾವು ಹೊಂದಿರುವುದು

$$
(38)\quad
\begin{aligned}
X_{k1} + C_{11} u_1 + C_{12} u_2 + \cdots + C_{1(n-r)} u_{n-r} &= 0 \\
X_{k2} + C_{21} u_1 + C_{22} u_2 + \cdots + C_{2(n-r)} u_{n-r} &= 0 \\
\vdots \\
X_{kr} + C_{r1} u_1 + C_{r2} u_2 + \cdots + C_{r(n-r)} u_{n-r} &= 0
\end{aligned}
$$

ಹೀಗೆ ಅಂಕನದ ಬದಲಾವಣೆಯೊಂದಿಗೆ (38) ಮತ್ತು (36) ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ (38)ರ ಪರಿಹಾರಗಳು, (36)ರ ಪರಿಹಾರಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿವೆ. (36)ರ ಪರಿಹಾರಗಳು (9)ಕ್ಕೂ ಪರಿಹಾರಗಳಾಗಿವೆಯಾದ್ದರಿಂದ (38) ಕೂಡ ವ್ಯೂಹ (9)ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. (38)ನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು. $u_1, u_2, \ldots,$ u_{n-r} ಗಳಿಗೆ ಬೇಕೆನಿಸಿದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನಾದರೂ ಕೊಟ್ಟು, (38) ರಿಂದ $x_{k1}, x_{k2} \ldots x_{kr}$ಗಳನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಇದು ವ್ಯೂಹ (9)ಕ್ಕೆ ಪರಿ ಹಾರವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ (3ನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಬೇಕಾ ಗಿರುವ), ನಾವು (38)ರಲ್ಲಿ, $(n-r)$ 'ಆಯ್ಕೆ'ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ.

(38)ನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ (22) ಮತ್ತು (26)ನ್ನು ನೋಡೋಣ. (22)ರಲ್ಲಿ ನಾವು $n=3$, $r=2$, $k_1=1$, $k_2=2$ ಅನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಉಳಿದ ಚರಾಂಕ z, ಆದ್ದರಿಂದ $u_1=z$. $C_{11}=-\frac{1}{11}$, ಮತ್ತು $C_{21}=-\frac{4}{11}$. (26)ರಲ್ಲಿ ನಾವು $n=3$, $r=2$. $k_1=1$, $k_2=3$ ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಉಳಿದ ಚರಾಂಕ y ಆಗಿದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು $u_1=y$, $C_{11}=3$ ಮತ್ತು $C_{21}=0$ ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಈ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದೊಳಗೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 2. ಪ್ರಮೇಯ 1 ರಲ್ಲಿಯಂತೆ ಸಂಕೋಚಿಸಿದ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆ R ಕಂಡುಹಿಡಿದ ನಂತರ, (9), ಕೇವಲ $n=r$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಕ್ಷುದ್ರಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಕೇವಲ $n>r$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ (9) ಒಂದು ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ R ಅಶೂನ್ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು r ಆಗಿದೆ. $n>r$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ನಾವು ವ್ಯೂಹ (9)ಕ್ಕೆ ಎಲ್ಲ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು, $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}$ ನಿರಂಕುಶ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಮತ್ತು (38)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ ಗಳನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಿ ದೊರಕಿಸುತ್ತೇವೆ.

$n>r$ ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂಚಿತವಾಗಿ ತಿಳಿದಿರುವ ಒಂದು ಪ್ರಸಂಗವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ.

ಅನುಮಿತ. ವ್ಯೂಹ (9) ರಲ್ಲಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಜ್ಞಾತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಯಾವಾಗಲೂ ವ್ಯೂಹ (9)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತೇವೆ.

ಸಾಧನೆ. ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ m ಆಗಿರುವಾಗ ಮತ್ತು ಅಜ್ಞಾತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ಆಗಿರುವಾಗ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯು $m \times n$ ಆಗಿದೆ. $m<n$ ಎಂದು ಗ್ರಹಿಸುವುದರಿಂದ ಒಂದು $m \times n$ ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆ R ಪಡೆಯಲು, ಪ್ರಮೇಯ 1ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಈ ಮಾತೃಕೆಯ ಮೇಲೆ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ನೆರವೇರಿಸಿ. R ಅಶೂನ್ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ r ಆಗಿರಲಿ. R ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ m ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಆಗ $r \leq m$. ಹೀಗೆ $r<n$ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಪ್ರಮೇಯವು ವ್ಯೂಹ (9) ಒಂದು ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂಬ ಭರವಸೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಟೀಕೆಗಳು. ಈ ಅನುಮಿತವು ಒಂದು ಮೂಲಭೂತ ಫಲಿತಾಂಶವಾಗಿದೆ. ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಜ್ಞಾತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಾಗಲೆಲ್ಲ ನಾವು ವ್ಯೂಹ (9)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ನಾವು ಕನಿಷ್ಠ ಅಜ್ಞಾತಗಳಷ್ಟೇ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಸಾಕಷ್ಟು ಸಮೀಕರಣಗಳು ಅತಿಸಮೃದ್ಧವಾಗಿದ್ದು ವಿಸರ್ಜಿಸಲ್ಪಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತಿರುವ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ, ಒಂದು

ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ನಾವು ಕನಿಷ್ಠ ಅಜ್ಞಾತಗಳಷ್ಟೇ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಸಾಕಷ್ಟು ಸಮೀಕರಣಗಳು ಅತಿಸಮೃದ್ಧವಾಗಿದ್ದು ವಿಸರ್ಜಿಸಲ್ಪಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತಿರುವ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇದನ್ನೇ ಪ್ರಮೇಯ 2 ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವು, ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಎಲ್ಲ ಅತಿಸಮೃದ್ಧ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು, ಅಂದರೆ ಹೊಸ ವಿಷಯಗಳೇನನ್ನೂ ಹೇಳದಂಥವುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕುವ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ನಾವು ಉಳಿದ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೇಲೆ 'ಅವಲಂಬಿಸಿರು'ವಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸುತ್ತೇವೆ. R ನಿರ್ಧಾರವಾದ ನಂತರ ಉಳಿಯುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು 'ನಿರವಲಂಬಿತ'ವಾದವುಗಳು. ವ್ಯೂಹ (9) ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದು ಕೇವಲ 'ನಿರವಲಂಬಿತ' ಸಮೀಕರಣಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಜ್ಞಾತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಕಡಮೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ. $n=r$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇರುವ ಒಂದೇ ಪರಿಹಾರವು (37) ಆಗಿರಲೇಬೇಕು. $n>r$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ನಾವು $n-r$ 'ಆಯ್ಕೆ'ಗಳನ್ನು ಅಥವಾ $n-r$ 'ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯದಸ್ತರ'ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಮತ್ತೊಂದು ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ವ್ಯೂಹ(9)ರ ಪರಿಹಾರಗಳು $n-r$ 'ಆಯಾಮ' ಹೊಂದಿವೆ. ಈ 'ಆಯಾಮ', 'ಆಯ್ಕೆ', 'ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯದ ಸ್ತರಗಳು', 'ನಿರವಲಂಬನೆ' ಮತ್ತು 'ಅವಲಂಬನೆ'ಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು 3ನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಲಾಗುವುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 1 ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಂಕುಚನೆಗೊಂಡ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆ R ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ವಿಸರ್ಜನೆಯ ಅಥವಾ **ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಕುಚನೆ**ಯ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. A ಯನ್ನು ಮಾತೃಕೆ R ಗೆ **ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಂಕುಚನೆ** ಮಾಡಿದ್ದೇವೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ ಅಥವಾ 'ಅಡ್ಡಸಾಲು' ಅನ್ನು ಒತ್ತಿ ಹೇಳಬೇಕಾಗಿರದಿದ್ದರೆ ಸುಮ್ಮನೆ A ಯನ್ನು ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ರೂಪಕ್ಕೆ **ಸಂಕುಚಿಸಿದ್ದೇವೆಂದು** ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ನೀಟಸಾಲಿನ ಸಂಕುಚನೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನೂ ವಿವರಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು; ಆದರೆ ಇದು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಅಷ್ಟೇನೂ ಉಪಯುಕ್ತವಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, ನಾವು ಅಂಥದೊಂದು ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಕೈ ಬಿಡೋಣ.

ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಂಕುಚನೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹಗಳಿಗೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿರುವುದು ಏನೆಂದರೆ ಕೂಡಲು, ಕಳೆಯಲು, ಗುಣಿಸಲು ಮತ್ತು ಭಾಗಿಸಲು ಶಕ್ಯರಾಗಿರ

ಬೇಕೆಂಬುದು. ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಂತೆ ಕೂಡುವಿಕೆ, ಕಳೆಯುವಿಕೆ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ ವ್ಯೂಹಗಳನ್ನು **ಕ್ಷೇತ್ರ**ಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. 4ನೇ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದು **ಕ್ಷೇತ್ರ** ಆಗಿವೆ ಮತ್ತು ಆ ಕಾರಣದಿಂದ ನಮ್ಮ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತರಾಗಿರುತ್ತೇವೆ. ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದರೆ $a+ib$ ರೂಪದವು. ಇಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು b ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $i^2=-1$. $(a+ib)+(c+ib)=(a+c)+i(b+d)$ ಮತ್ತು $(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$ ಇವುಗಳಿಂದ ಕೂಡುವುದನ್ನು ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವೆರಡು ಪರಿಕರ್ಮಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಕಳೆಯುವಿಕೆ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ವಿವರಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(*a*) $2x+y=0$

(*b*)
$$7x_3+x_4=0$$
$$2x_1+x_2x_{-4}=0$$
$$x_2-x_3+3x_4=0$$

(*c*)
$$x_1+2x_2=0$$
$$3x_1+4x_2=0$$

(*d*)
$$ax_1+a^2x_2=0$$
$$bx_1+b^2x_2=0$$

ಇಲ್ಲಿ $a\neq b$, $a\neq 0$, $b=0$.

(*e*)
$$6x_2+x_3=0$$
$$9x+12x_2-8x_8=0$$
$$12x_1+62x_2-3x_3=0$$
$$-3x_1+8x_2-2x_3=0$$

(*f*)
$$x_1-x_2+x_3+x_4-x_5=0$$
$$x_1-x_3+x_4-x_5=0$$
$$x_1-x_4+x_5=0$$
$$x_1-x_5-=0$$

(*g*) $x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$
$x_1 - 3x_2 = 0$
$x_4 - x_1 = 0$

(*h*) $x_1 + 2x_2 = 0$
$x_1 + 3x_2 = 0$
$x_1 - x_2 = 0$
$3x_2 = 0$

(*i*) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$ax_1 + ax_2 + ax_3 = 0$
$a^2x_1 + a^2x_2 + a^2x_3 = 0$

(*j*) $a^2x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0$
$x_1 = 0$
$ax_1 + 2x_2 = 0$

2. ಪ್ರಶ್ನೆ 1ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ರೂಪಕ್ಕೆ ಸಂಕುಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

3. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(*a*) $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$
$-2x_1 - x_3 = 0$
$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$

(*b*) $3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$
$x_1 + x_4 = 0$
$x_2 + x_4 = 0$

(*c*) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$
$5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0$
$9x_1 + 10x_2 + 11x_3 + 12x_4 = 0$
$13x_1 + 14x_2 + 15x_3 + 16x_4 = 0$

(*d*) $7x_1 - x_2 - x_3 = 0$
$6x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$
$13x_1 - 4x_2 = 0$

4. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮೀಕರಣ ವ್ಯೂಹಗಳು ಯಾವುವು ?

(*a*) $3x_1 + 2x_2 = 0$

(*b*) $8x + 9y + 10z = 0$
$x - y + z = 0$
$x + \sqrt{2}y + z = 0$

(c)
$$\begin{aligned} 6x+\sqrt{5}y-\sqrt{2}z+w&=0\\ x-\sqrt{3}y+\sqrt{6}z&=0\\ x+y-7z-w&=0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 7x_1-x_2-x_3&=0\\ 6x_1-3x_2+x_3&=0\\ 13x_1-4x_2&=0 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+y+3z&=0\\ x+y+2z&=0\\ x-y-z&=0 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} x-y+z&=0\\ 3x-\sqrt{2}z&=0 \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} x-y-z-w&=0\\ x+3y-z+w&=0\\ 3x-7y-z-6w&=0\\ 2x+2y-2z&=0\\ 6x-2y-4z-5w&=0 \end{aligned}$$

5. ಮೂರು ಅಜ್ಞಾತಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಘಾತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ಸಮತಲವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ವಾದವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಮೂರು ಅಜ್ಞಾತಗಳಲ್ಲಿ m ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹವೊಂದಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತಿಕವಾಗಿ ವಿವರಿಸಿ. ಅಲ್ಲದೆ ಪ್ರಮೇಯ 2ರ ಅನುಮಿತವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಲೂ ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.

6. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ವ್ಯೂಹಗಳನ್ನು ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ರೂಪಕ್ಕೆ ಸಂಕುಚಿಸುವುದರಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(a)
$$\begin{aligned} x_1+ix_2+3x_3&=0\\ x_1-x_2+(1+i)x_3&=0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3-x_4&=0\\ ix_1+(2+3i)x_2-x_3+ix_4&=0\\ -x_1+7x_2+2ix_3-7x_4&=0\\ -ix_1+(3-i)x_2+x_3-ix_4&=0 \end{aligned}$$

7. ಒಂದು ಸಮಘಾತ ವ್ಯೂಹದ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆ A ಆಗಿರಲಿ. $i < j$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $Aij = 0$ ಎಂದು ಮತ್ತು Aಯು nxn ಆಗಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು iಗೆ ಕೇವಲ $Aij = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹವು ಒಂದು ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

8. ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹವು

$$ax + by = 0$$
$$cx + dy = 0$$

ಕೇವಲ $ad = bc$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಒಂದು ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

9. ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹವು

$$A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z = 0$$
$$A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z = 0$$
$$A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z = 0$$

ಕೇವಲ $A_{11}\ A_{22}\ A_{33} + A_{12}\ A_{23}\ A_{31} + A_{13}\ A_{32}\ A_{21} - A_{13}\ A_{22}\ A_{31} - A_{12}\ A_{21}\ A_{33} - A_{11}\ A_{23}\ A_{32} = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಒಂದು ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

10. A ಮತ್ತು Bಗಳು mxn ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಪ್ರಮೇಯ ಒಂದರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಂಥ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಶ್ರೇಣಿಯಿಂದ Bಯನ್ನು Aಯಿಂದ ದೊರಕಿಸಬಹುದಾದರೆ Bಯು Aಗೆ **ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾಗಿದೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. Bಯು Aಗೆ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ Aಯು Bಗೆ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ :** 6ನೇ ಪುಟದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪರಿಕರ್ಮವೂ ಅದೇ ರೀತಿಯ ಒಂದು ವಿಲೋಮ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, Aಯ i ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು a ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ Aಯ j ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡುವುದರಿಂದ B ಯನ್ನು A ಯಿಂದ ದೊರಕಿಸಿದ್ದರೆ, ಆಗ Bಯ i ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು $-a$ ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಅದನ್ನು Bಯ j ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡುವುದರಿಂದ, Aಯನ್ನು Bಯಿಂದ ದೊರಕಿಸಬಹುದು.]

11. A ಮತ್ತು B ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಮಘಾತ ವ್ಯೂಹಗಳ ಸಹ ಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. A ಮತ್ತು B mxn ಆಗಿವೆ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ

ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾಗಿವೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಎರಡೂ ವ್ಯೂಹಗಳು ಒಂದೇ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. [**ಸೂಚನೆ :** A ಮತ್ತು Bಗಳೆರಡೂ ಒಂದೇ ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆಗೆ ಸಂಕುಚಿಸಲ್ಪಡಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 2ನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿರಿ.]

12. ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ **ಖಚಿತವಾಗಿ** ಒಂದಕ್ಕೆ ಯಾವುದೇ 2×2 ಮಾತೃಕೆಯು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & a\\0 & 0\end{bmatrix} \quad a \text{ ನಿರಂಕುಶ.}$$

[**ಸೂಚನೆ :** ಇವು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ 2×2 ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆಗಳು. ಮೇಲಿರುವುದರಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದಕ್ಕಾದರೂ ಯಾವುದೇ 2×2 ಮಾತೃಕೆಯು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಲು ಪ್ರಮೇಯ ಒಂದನ್ನು ಬಳಸಿ. 11ನೇ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ, ಮೇಲಿರುವುದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೂ ಕೂಡ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

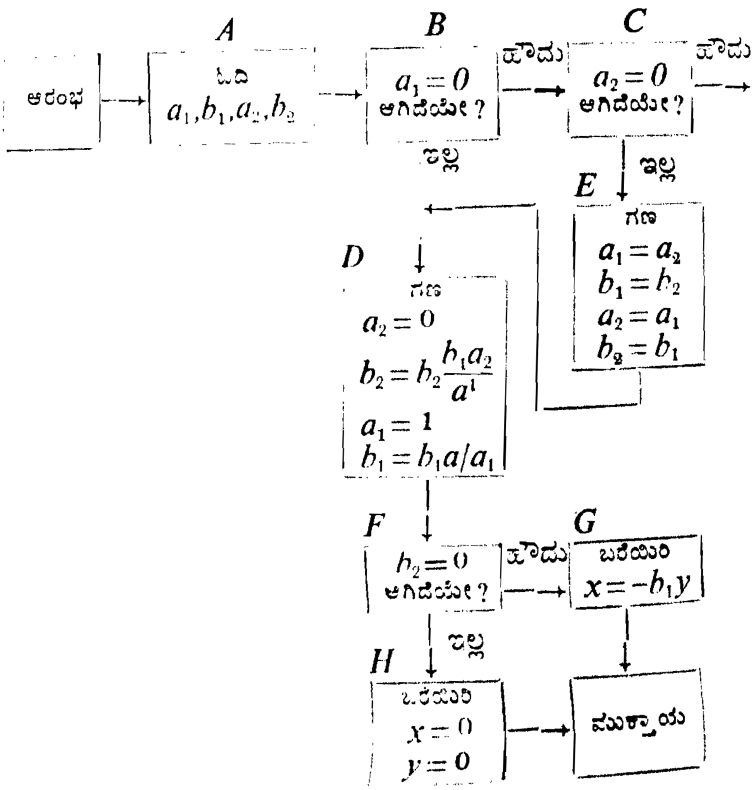
13. ಮೂರು ಅಜ್ಞಾತಗಳಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ಸಮಘಾತ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ 1ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನಾಲ್ಕು ಅಜ್ಞಾತಗಳಲ್ಲಿನ ನಾಲ್ಕು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ವ್ಯೂಹಕ್ಕೂ ಬಿಡಿಸಲು ಅವಶ್ಯವಾದ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಅನೇಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳಿಂದ ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಈ ಅಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಭಾಗಗಳ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗಾಗಿ ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವುದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗುವುದು. ಈಗ ಗಮನವನ್ನು ಒಂದು ಸರಳ ರೀತಿಯ ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರಕ್ಕೆ ಪರಿಮಿತಗೊಳಿಸೋಣ ಮತ್ತು 'ಆರಂಭ' ಅಥವಾ 'ಮುಕ್ತಾಯ'ವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ವೃತ್ತವನ್ನು, ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಆಯಾಕಾರ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು ಪರ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಅಂಡವೃತ್ತಗಳನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ.

ಪರಿವಹನೆಯನ್ನು ಬಾಣದಗುರುತಿಂದ ತೋರಿಸೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಒಂದು ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರದ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಚಿತ್ರ 3ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

$$a_1x + b_1y0, \qquad a_2x + b_2y = 0.$$

E ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯು ಅಂಕನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ, D ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯು 'ವಿಸರ್ಜನೆ'ಯನ್ನು ನಡೆಸುತ್ತದೆ, ಅನಂತರ ಅಂಕಕರಣವನ್ನು ಬದಾಲಾಯಿಸುತ್ತದೆ. C ಯಿಂದ 'ಹೌದು' ಬಾಣವು ಪೂರ್ಣವಾಗಿಲ್ಲ.



ಚಿತ್ರ 3

(*a*) ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.

(*b*) ಮೂರು ಅಜ್ಞಾತಗಳಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ಸಮಘಾತ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಒಂದು ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ವಿಶೇಷ ಅಭ್ಯಾಸ

ಪ್ರಮೇಯ 1ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ. [**ಸೂಚನೆ :** ಇಲ್ಲಿರುವ ಒಂದೇ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಯೆಂದರೆ ಅಂಕನಣದ್ದು. ನೀವು ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವವರಾದರೆ ಆಗ ಇದು ಸುಲಭ. ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮೊದಲು ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೇ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 1 ದೊರಕಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೇ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿದುದರಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯಗಳನ್ನು ದೊರಕಿಸಿರಿ. ನಂತರ ಎರಡನೇ ನೀಟಸಾಲಿಗೆ ಮುಂದುವರಿಯಿರಿ. ಮೊದಲನೇ ನೀಟಸಾಲಿನ ಎಲ್ಲ ದಾಖಲಾತಿಗಳೂ ಶೂನ್ಯಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ನೇರವಾಗಿ ಎರಡನೇ ಸಾಲಿಗೆ ಮುಂದುವರಿಯಿರಿ. ಈಗ ನೀವು ಏನು ಮಾಡಬೇಕು ?]

ಭಾಗ 2. ಅಸಮಘಾತ ವ್ಯೂಹಗಳು

ಕೆಳಗಿನಂಥ ಒಂದು ಅಸಮಘಾತ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ [(1) ಭಾಗ 1 ನೋಡಿರಿ]

(1)
$$2x+3y=1$$
$$x-y=2$$

ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಪದಗಳೆರಡರ ಜಾಡನ್ನೂ ಅನುಸರಿಸಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಯು ಇದನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಡುವುದು

ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ್ಗ

(2)
$$\begin{aligned} A_{11}x_1+A_{12}x_2+\cdots+A_{1n}x_n&=y_1\\ A_{21}x_1+A_{22}x_2+\cdots+A_{2n}x_n&=y_2\\ &\vdots\\ A_{m1}x_1+A_{m2}x_2+\cdots+A_{mn}x_n&=y_m, \end{aligned}$$

ಕೆಳಗಿನ ಮಾತ್ರಕೆಯು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವ $m \times (n+1)$ ಮಾತ್ರಕೆ A' ರೂಪಿಸಿರಿ.

$$(3) \qquad A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} & y_1 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} & y_2 \\ \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} & y_m \end{bmatrix}$$

ಈ ಮಾತ್ರಕೆಯನ್ನು ವ್ಯೂಹ (2)ರ **ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತ್ರಕೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $j \leq n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, A' ನ j ನೀಟಸಾಲು ಮತ್ತು i ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ದಾಖಲಾತಿಯು i ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿನ i ಅಜ್ಞಾತದ ಸಹಗುಣಕವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $j = n+1$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದು i ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿನ ಸ್ಥಿರಪದವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ A'ನ ಮೊದಲ n ನೀಟಸಾಲುಗಳು (2)ರ ಸಹಗುಣಕ ಮಾತ್ರಕೆಯಿಂದ ಆಗಿವೆ ಮತ್ತು A'ನ ಕೊನೆಯ ನೀಟಸಾಲು ಸ್ಥಿರಪದಗಳಿಂದ ಆಗಿದೆ. A'ನ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಮೇಲೆ ನೆರವೇರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪರಿಕರ್ಮವು ವ್ಯೂಹ (2)ರ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೇಲೆ ನೆರವೇರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪರಿಕರ್ಮದೊಂದಿಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಅನುಗುಣವಾಗಿದೆ. ಭಾಗ 1ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ನಾವು (2)ರ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಓದಬಹುದಾದಂಥ ರೂಪವೊಂದಕ್ಕೆ A' ಅನ್ನು ಸಂಕುಚಿಸಬಹುದು. ಈ ರೂಪವು ಹೇಗೆ ಕಾಣುವುದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಲು ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಬಹುದು.

(1) ರ ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತ್ರಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ :

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ಮುಂದಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು. ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು 3ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಬಂದದ್ದನ್ನು ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅನಂತರ ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು $\frac{1}{5}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಆಗ ಬರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು -1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಬಂದದ್ದನ್ನು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿ, ಅನಂತರ ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು -1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ

$$(5) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}, \qquad \text{ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.}$$

ಇದು ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹದ ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

$$(6) \qquad x=\tfrac{7}{8}, \qquad y=-\tfrac{3}{8},$$

ಇದೇ ನಮ್ಮ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹದ [ನೋಡಿರಿ (7), ಭಾಗ 1]

$$(7) \qquad \begin{aligned} 2x+3y&=1 \\ 4x+6y&=3 \end{aligned}$$

ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ :

$$(8) \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು -2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದದ್ದನ್ನು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ :

$$(9) \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ಇದು ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹದ ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

$$(10) \qquad 2x+3y=1, \qquad 0=1,$$

x ಮತ್ತು yನ ಯಾವ ಆಯ್ಕೆಯೂ ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಾರ ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ ; ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ವ್ಯೂಹವು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ವ್ಯೂಹವು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರದಿದ್ದರೆ, (9) ಕ್ಕಿಂತ

ಮುಂದಕ್ಕೆ ಹೋಗುವ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ. ಒಂದು ವೇಳೆ A' ಸಂಕುಚಿಸುವಾಗ ಮೊದಲಿನ n ದಾಖಲಾತಿಗಳು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವಂಥ ಮತ್ತು $(n+1)$ ನೆಯ ದಾಖಲಾತಿಗಳು ಶೂನ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದಂಥ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ತಲುಪಿದರೆ ಆಗ ವ್ಯೂಹವು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂಥ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲು ಚರಾಂಕಗಳ ಯಾವುದೇ ಆಯ್ಕೆಗೂ **ಸಫಲವಾಗದಂಥ** ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದೊಂದಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಬಹುದು.

ಇದುವರೆಗೆ ಎರಡು ಪ್ರಸಂಗಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದಾಯಿತು. (4)ರಲ್ಲಿ ನಾವು (5)ರಿಂದ ತೋರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಂತೆ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೆವು ; (7)ರಲ್ಲಿ ನಾವು (10)ರಿಂದ ತೋರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಂತೆ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರಲೇ ಇಲ್ಲ. ಈಗ ನಾವು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಪ್ರಸಂಗವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹಕ್ಕೆ ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತೃಕೆಯು

$$\begin{aligned} 3x-y+7z&=0\\ 2x-y+4z&=\tfrac{1}{2}\\ x-y+z&=1\\ 6x-4y+10z&=3 \end{aligned} \tag{11}$$

ಹೀಗಿದೆ

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 0\\ 2 & -1 & 4 & \frac{1}{2}\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 6 & -4 & 10 & 3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು (12)ರ ಮೇಲೆ ನೆರವೇರಿಸಿ. 3ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು −3ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ ; ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ ; ಅನಂತರ −2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿ, −6ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಮಾತೃಕೆ ಮುಂದಿನಪುಟದಲ್ಲಿದ್ದಂತಿದೆ.

$$(13) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

ಒಂದು, ಎರಡು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು -2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಒಂದು ನಾಲ್ಕನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿ ಅನಂತರ 1ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆ ದೊರೆಯುವುದು.

$$(14) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ಇದು ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹದ ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

$$(15) \qquad \begin{aligned} x + 3z &= -\tfrac{1}{2} \\ y + 2z &= -\tfrac{3}{2} \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

z ಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸಿ, (15)ರಿಂದ x ಮತ್ತು yಗಳನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಿ, ಈಗ (11)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪಡೆದೆವು. ಹೀಗೆ zನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ ಒಂದೊಂದರಂತೆ ಅನೇಕ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ (11)ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ನಾಲ್ಕು ಸಮತಲಗಳು (15)ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

ಈ ವಿಧಾನವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರಬೇಕು. ಸಹಗುಣಕ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು (A'ನ ಮೊದಲ n ನೀಟಸಾಲುಗಳು) ಸೋಪಾನ ವ್ಯೂಹ ರೂಪದಲ್ಲಿಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತ ನಾವು A' ಮೇಲೆ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ಪ್ರಸಂಗಗಳು ಪರಿಣಮಿಸುತ್ತವೆ. ಅವೆಂದರೆ ಮೊದಲ n ದಾಖಲಾತಿಗಳು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವಂಥ ಮತ್ತು $(n+1)$ನೇ ದಾಖಲಾತಿಯು ಶೂನ್ಯವಾಗಿಲ್ಲವಂಥ (ಅಂದರೆ ಎಂದಿಗೂ ಸಫಲವಾಗದಂಥ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣ) ಅಥವಾ ಅಂಥ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುವುದಿಲ್ಲ. ಮೊದಲನೆಯ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ.

ಎರಡನೇ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಮೊದಲ n ದಾಖಲಾತಿಗಳನ್ನು ಶೂನ್ಯವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವಂಥ ಹಾಗೂ ಆದರ $(n+1)$ನೇ ದಾಖಲಾತಿಯನ್ನು ಶೂನ್ಯವಾಗಿಯೇ ಹೊಂದಿರುವಂಥ ಯಾವುದೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂಥ ಮತ್ತು ಮೊದಲ n ನೀಟಸಾಲುಗಳು ಸಂಕುಚಿಸಿದ ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವಂಥ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆ R' ಅನ್ನು ಅಂತಿಮವಾಗಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಮೊದಲ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯು ಕೊನೆಯ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂಥ ಗುಣವನ್ನು ಯಾವ ಅಡ್ಡಸಾಲೂ ಹೊಂದಿರಲಾರದು. ಹೀಗೆ ಈ R' ಮಾತೃಕೆಯು ಒಂದು $m \times (n+1)$ ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. ಈಗ R' ವಿವರಿಸೋಣ ; ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಗಳಿರುವ r ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು R' ಹೊಂದಿದೆ ; ಇವು R' ನ ಮೊದಲ r ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು. i ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮೊದಲನೇ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯು $i = 1,\ 2, \ldots, r$ ಒಂದು ಆಗಿದೆ. ಇದು K_1 ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ K_1 ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ಎಲ್ಲಾ ದಾಖಲಾತಿಗಳೂ ಶೂನ್ಯಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು, ಮತ್ತು,

$1 \leq K_1 \leq K_2 < \cdots < K_r \leq n$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

(ಮೊದಲ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಗಳು ಕೆಳಗಡೆಗೆ ಮತ್ತು ಬಲಕ್ಕೆ ಹೋಗುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅಂತಹ ಯಾವ ದಾಖಲಾತಿಯೂ $n+1$ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾರದು.) ಕೊನೆಯ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ದಾಖಲಾತಿಗಳೂ r ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಕೆಳಗೆ ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಲ್ಲದೆ ನಾವು $n \leq r$ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಸಹ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. [ನೋಡಿರಿ : (35), ಭಾಗ 1]

ಮೊದಲಿನಂತೆ ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತೇವೆ. $n = r$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$K_1 = 1, \qquad K_2 = 2, \ldots, \qquad K_n = n.$$

ನಮ್ಮ ವ್ಯೂಹವು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಕುಚಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ

$$\begin{aligned} x_1 &= R_1{}'_{(n+1)} \\ x_2 &= R_2{}'_{(n+1)} \\ &\vdots \\ x_n &= R_n{}'_{(n+1)} \\ 0 &= 0 \\ &\vdots \\ 0 &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

ಇಲ್ಲಿ $R'_{i(n+1)}$, R'ನ iನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮತ್ತು $(n+1)$ನೇ ನೀಟ ಸಾಲಿನ ದಾಖಲಾತಿಯಾಗಿದೆ. ಕ್ಷುದ್ರ ಸಮೀಕರಣಗಳ $(0=0)$ ಸಂಖ್ಯೆಯು $m-n$ ಆಗಿದೆ. ವ್ಯೂಹ (2), (16) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. $n>r$ ಆಗಿದ್ದರೆ $x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kr}$ಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಿರದ ಆ ಚರಾಂಕಗಳನ್ನು $u_1, u_2, \cdots, u_{n-r}$ ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸಿ R', ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹದ ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. $1\leq i\leq r$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ ಈ ವ್ಯೂಹದ iನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ c_{ij}ಯು u_jಯ ಸಹಗುಣಕವಾಗಿರಲಿ. $z_1, z_2, \cdots, z_r$ ಗಳು R'ನ ಕೊನೆಯ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲ r ದಾಖಲಾತಿಗಳಾಗಿರಲಿ. (ಆ ನೀಟ ಸಾಲಿನ ಉಳಿದ ದಾಖಲಾತಿಗಳು ಶೂನ್ಯಗಳಾಗಿವೆ.) ಅಂಕನದ ಈ ಬದಲಾವಣೆಯೊಂದಿಗೆ, ವ್ಯೂಹವು ಹೀಗಾಗುತ್ತದೆ.

$$
\begin{aligned}
x_{k1}+c_{11}u_1+c_{12}u_2+\cdots+c_{1(n-r)}u_{n-r}&=z_1\\
x_{k2}+c_{21}u_1+c_{22}u_2+\cdots+c_{2(n-r)}u_{n-r}&=z_2\\
\vdots\qquad&\\
x_{kr}+c_{r1}u_1+c_{r2}u_2+\cdots+c_{r(n-r)}u_{n-r}&=z_r\\
0&=0\\
&\vdots\\
0&=0.
\end{aligned}\tag{17}
$$

ಈಗ ಈ ರೂಪಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ರೂಪಾಂತರಿಸೋಣ. (1) ರಲ್ಲಿ, 5)ನ್ನು ಪಡೆದೆವು, ಇದರಿಂದ

$$n=r=2,\quad k_1=1,\quad k_2=2,$$
$$R'_{13}=\tfrac{7}{5},\quad R'_{23}=-\tfrac{3}{5},$$
$$x_{k1}=x,\quad x_{k2}=y \quad \text{ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.}$$

7)ರಲ್ಲಿ (10)ನ್ನು ಪಡೆದೆವು, ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಲಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಂಡೆವು ಮತ್ತು ಮುಂದಕ್ಕೆ ಹೋಗಲಿಲ್ಲ. (11)ರಲ್ಲಿ ನಾವು (14)ನ್ನು ಕಂಡುಕೊಂಡೆವು, ಆದರಿಂದ $n=3$, $r=2$, $k_1=1$, $k_2=2$, $x_{k1}=x$, $x_{k2}=y$, $_1=z$, $c_{11}=3$, $c_{21}=2$, $z_1=-\frac{1}{2}$, $z_2=-\frac{3}{2}$ ಎಂದು ಪಡೆದೆವು. (5)ರಲ್ಲಿ, $=r$, ಇದ್ದು ನಾವು ಒಂದು ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೆವು. (11)ರಲ್ಲಿ $>r$ ಇದ್ದುದರಿಂದ ಅನೇಕ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನೂ ಹೊಂದುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ಈ ಪರಿಣಾಮಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದೊಳಗೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಸಾಧನೆಯು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆಯ ಜಾಡನ್ನು ಹಿಡಿದಿಡುವ ಸಾಧನಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 3. ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ

$$(2)\qquad \begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= y_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= y_m, \end{aligned}$$

ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಿರಿ :

$$(3)\qquad A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} & y_1 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} & y_2 \\ \vdots & & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} & y_m \end{bmatrix}.$$

A' ಅನ್ನು ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರಲು ಅದಕ್ಕೆ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿರಿ. ತನ್ನ ಮೊದಲ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯು $n+1$ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂಥ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಅಥವಾ ಮೊದಲ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯೂ $n+1$ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳದಂಥ ಒಂದು ಸಂಕೋಚಿಸಿದ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸೋಪಾನ ವ್ಯೂಹಮಾತೃಕೆ R' ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಎರಡನೇ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ. ಈ R' ಅಶೂನ್ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ r ಆಗಿರಲಿ. $n=r$ ಆಗಿದ್ದರೆ, (16) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. $n>r$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ವ್ಯೂಹ (17) ಪರಿಣಮಿಸುವುದು ಮತ್ತು $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}$ ಗಳಿಗೆ ನಿರಂಕುಶ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು (17)ನ್ನು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ ಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಪ್ರಸಂಗ ಸ್ವಲ್ಪ ಸ್ವಾರಸ್ಯದ್ದಾಗಿದೆ. ಇದು $m=n$ ಆಗಿರುವಾಗಿನ ಪ್ರಸಂಗ; ಅಂದರೆ, ಇಲ್ಲಿ ಅಜ್ಞಾತಗಳಷ್ಟೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 4. (2)ರಲ್ಲಿ $m=n$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. (3)ರಲ್ಲಿ ನಂತೆ A' ರೂಪಿಸಿರಿ. Aಯು (2)ರ ಸಹಗುಣಕ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ; ಅಂದರೆ Aಯು A'ನ ಮೊದಲ n ನೀಟಸಾಲುಗಳಿಂದ ಆಗಿದೆ. Aಯು ಕೆಳಗಿರುವ $n\times n$ ಮಾತೃಕೆಗೆ ಸಂಕುಚಿತವಾಗಬಲ್ಲುದಾದರೆ ಮಾತ್ರ (2) ಒಂದು ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತದೆ.

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1\dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ಸಾಧನೆ: (2) ಒಂದು ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ವ್ಯೂಹ (16) ಪರಿಣಮಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ R'ನ ಮೊದಲ n ನೀಟಸಾಲುಗಳು ಮಾತೃಕೆ I ರೂಪಿಸುತ್ತವೆ; ಅಂದರೆ, A'ನ ಮೊದಲ n ನೀಟಸಾಲುಗಳು Iಗೆ ಸಂಕುಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಇದರಿಂದ Aಯು I ಗೆ ಸಂಕುಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, Aಯನ್ನು Iಗೆ ಸಂಕುಚಿಸಬಲ್ಲೆವಾದರೆ ಇವೇ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು A'ಗೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ. ಇದು $n\times(n+1)$ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

$$R'=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & z_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & z_2 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & z_n \end{bmatrix}$$

ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆಂದು (ಯಾವುದೇ ಮೊದಲ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯೂ $n+1$ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳದಿರುವುದರಿಂದ), ಮತ್ತು $n=r$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಮೇಯ 3 ರಿಂದ (2) ಒಂದು ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಟೀಕೆ: R' ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಯಾವ ರೀತಿಯಿಂದಲೂ ಇಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿಲ್ಲ (ನೋಡಿ: ವಿಶೇಷ ಅಭ್ಯಾಸ, ಭಾಗ 3) ಅಂದರೆ, ಬೇರೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದರೆ, ಬೇರೆ ಮಾತೃಕೆ R' ದೊರೆಯುವುದೇ? ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ **ಇಲ್ಲ** ಎಂದೇ. ಯಾವಾಗಲೂ ಅದೇ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಪರಿಣಾಮವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ R'ನ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. (2)ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರಗಳ ಅಸ್ತಿತ್ವ ಅಥವಾ ಅನಸ್ತಿತ್ವ, ಏಕೈಕತೆ ಅಥವಾ ಅನೇಕತೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ A' ಅನ್ನು ಸಂಕುಚಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿದೆ. R' ಹೇಗೇ ಕಾಣಿಸಿದರೂ, ತನ್ನ ಮೊದಲ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯು $n+1$ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವಂಥ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ನಾವು ಪಡೆದರೆ ಇದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರ ಇಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನಾದರೂ ನಾವು ಕೊನೆಯಪಕ್ಷ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ, ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. $n=r$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ಅಡ್ಡಸಾಲೂ ತನ್ನ ಮೊದಲ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯನ್ನು $n+1$ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿರದಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ R' (16)ರ ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲೇಬೇಕು; ಅಂದರೆ R' ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $n>r$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಗೊತ್ತಾಗಿರುವುದೆಂದರೆ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆಂಬುದು. ಮುಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು $n-r$ (2)ಕ್ಕೆ 'ನಿರವಲಂಬಿತ' ಪರಿಹಾರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗುವುದರೊಂದಿಗೆ 'r' (2) ರಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುವುದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ವ್ಯೂಹ (2)ನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೂ ಕೆಲವು ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯೂಹ (2) ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. (2) ಕೊನೆಯ ಪಕ್ಷ ಒಂದಾದರೂ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತೆ ನಾವು $y_1, y_2, \cdots, y_m$ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಲ್ಲೆವೇ? ಅದಕ್ಕೆ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಒಂದರಲ್ಲಿ ಪರಿಹಾರಗಳ ಅಸ್ತಿತ್ವದ ಭರವಸೆ ಕೊಡುವಂತೆ $y_1, y_2, \cdots, y_m$ಗಳ ಮೇಲಿನ ನಿರ್ಬಂಧಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ, ಇನ್ನೊಂದರಲ್ಲಿ ನಾವು $y_1, y_2, \cdots, y_m$ಗಳು ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸದೆ ಬಿಡಿಸಬಹುದಾಗಿರುವಂಥಹದು.

ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ :

$$(18)\qquad \begin{aligned} x+y+2z &= a_1 \\ -2x \quad -z &= a_2 \\ x+3y+5z &= a_3. \end{aligned}$$

ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ :

$$(19) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a_1 \\ -2 & 0 & -1 & a_2 \\ 1 & 3 & 5 & a_3 \end{bmatrix}.$$

ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಬಂದದ್ದನ್ನು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಅನಂತರ −1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಬಂದದ್ದನ್ನು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಮುಂದೆ ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು −1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದದ್ದನ್ನು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಯು ದೊರೆಯುವುದು.

$$(20) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a_1 \\ 0 & 2 & 3 & a_2+2a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_3-a_2-3a_1 \end{bmatrix}.$$

ಪ್ರಮೇಯ 3ಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ $a_3-a_2-3a_1 \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಯಾವ ಪರಿಹಾರವನ್ನೂ ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರಬೇಕಾದರೆ ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ಇರಬೇಕಾದ ಉಪಾಧಿಯು ಹೀಗಿದೆ :

$$(21) \qquad a_3-a_2-3a_1=0.$$

(21) ಪಾಲಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, ಹೊಂದಿರುವ

$$(22) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a_1 \\ 0 & 2 & 3 & a_2+2a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$ ಹೊಂದಿದೇವೆ

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. (ಅತಿ ಸವೃದ್ಧಿ ಯಾವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದ ಮೇಲೆ)

$$x-\frac{1}{2}z=-\frac{a_2}{2}$$

$$(23) \qquad y+\frac{3}{2}z=a_1+\frac{a_2}{2}$$

ಹೀಗೆ (18)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರಬೇಕಾದರೆ, (21) ಒಂದು ಅವಶ್ಯವಾದ ಮತ್ತು ಸಾಕಾದ ಉಪಾಧಿಯಾಗಿದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ :

$$(24)\qquad \begin{aligned} x+3y-z&=a_1\\ x-2y+z&=a_2\\ 2x-y+z&=a_3. \end{aligned}$$

ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕುಚನೆಯಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಮಾತೃಕೆ ಇಂತಿದೆ.

$$(25)\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1+2a_2-a_3\\ 0 & 1 & 0 & -a_1-3a_2+2a_3\\ 0 & 0 & 1 & -3a_1-7a_2+5a_3 \end{bmatrix}.$$

ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ, ಏಕೆಂದರೆ ತಪ್ಪು ಮೊದಲ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯು ನಾಲ್ಕನೇ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿ ಕೊಳ್ಳುವಂಥ ಯಾವುದೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನೂ a_1, a_2 ಮತ್ತು a_3ಯ ಯಾವುದೇ ಆಯ್ಕೆಗಳೂ ಕೊಡುವುದಿಲ್ಲ. ಅದೂ ಅಲ್ಲದೆ $n=r=3$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ a_1, a_2, ಮತ್ತು a_3ಯ **ಯಾವುದೇ** ಆಯ್ಕೆಯೂ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ನಾವು ಈ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸೋಣ. (18)ರಲ್ಲಿ a_1, a_2 ಮತ್ತು a_3ಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು (18)ರಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣವು (ಇದು ಒಂದು ಸಮತಲವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.) ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಸಮತಲವ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಪರಿಣಮಿಸುತ್ತದೆ. ಮೊದಲ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮತಲಗಳು a_1 ಮತ್ತು a_2ಗಳ ಯಾವುದೇ ಆಯ್ಕೆಗೂ (23) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. (21) ಪಾಲಿಸಲ್ಪಡು ವವರೆಗೂ ಈ ರೇಖೆಯು (18) ರಲ್ಲಿನ ಮೂರನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುದು. (21) ಪಾಲಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, ಆಗ (18)ರ ಮೂರನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಸಮತಲವು (21)ರ ರೇಖೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

(24)ರ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ, ಮೂರು ಸಮತಲಗಳೂ, a_1, a_2 ಮತ್ತು a_3 ಇವುಗಳ ಯಾವುದೇ ಆಯ್ಕೆಗೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ; ಅಂದರೆ, ನಾವು

ಸಮತಲಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಸರಿಸುತ್ತೇವೆಂಬುದು ಗಣನೀಯವಲ್ಲ, ನಾವು ಅದನ್ನು ಸಮಾಂತರ ರೀತಿಯಿಂದ ಮಾಡುತ್ತಿರುವವರೆಗೂ, ಅವು ಒಂದು ಏಕೈಕ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತವೆ.

ಈ ಪರಿಣಾಮಗಳ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣವನ್ನು ಓದುಗರಿಗೆ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವ್ಯೂಹಕ್ಕೂ ಎಲ್ಲಾ ಪರಿಹಾರಗಳೂ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡ ಸಾಲು ಸಂಕುಚಿಸುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

(a)
$$\begin{aligned} 3x+4y&=4\\ 9x+12y&=6 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x-y&=4\\ x+y&=7 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 3x-6y+7z&=0\\ 2x-y+z&=1\\ 7x+y-6z&=2\\ 2x+2y-4z&=1 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-x_3+x_4-3x_5&=1\\ 2x_1-3x_2+x_3-2x_4-x_5&=3\\ 5x_1-\tfrac{2}{3}x_2+x_3-3x_4+x_5&=0\\ -3x_1+x_2-x_3-x_4&=0 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} x-y+z+w&=0\\ x+2y-z-w&=1\\ x-y+z/2-w/2&=0\\ -3y+z-w&=-1 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0\\
4x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 0\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 1\\
x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &= 0\\
x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1\\
x_4 - x_5 &= -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned}
x - y &= 1\\
x - z &= 2\\
x - w &= 3\\
y + z + w &= 0
\end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_6 + 5x_7 &= 0\\
x_1 + x_2 + x_7 &= 1\\
x_2 + x_3 + x_7 &= 1\\
x_3 + x_4 + x_7 &= 1\\
x_4 + x_5 + x_7 &= 1\\
x_5 + x_6 + x_7 &= 1
\end{aligned}$$

(i)
$$\begin{aligned}
x - y &= 2\\
2x - 2y &= 4
\end{aligned}$$

(j)
$$\begin{aligned}
x - y + z + w &= 1\\
3x - 4y + 2z - w &= 0\\
8x - 10y + 6z &= 1
\end{aligned}$$

2. 4ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದೇ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ :

(a)
$$\begin{aligned}
x - z &= 1\\
y - z &= 2\\
y + z &= 0
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 &= 0\\
3x_1 - 7x_5 &= 1\\
x_2 + x_4 &= 0\\
x_3 - x_6 &= 0\\
x_1 + x_5 &= 6\\
x_6 &= 2
\end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 2x-3y-4z-w&=0\\ z+w&=0\\ x-y-z&=0\\ y+z&=1 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} z+y+2z+w&=0\\ z+w&=0\\ x-y-z&=0\\ y+z&=0 \end{aligned}$$

3. ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹಗಳು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತೆ $y_1, y_2, \dots, y_n$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ :

(a) $$\begin{aligned} 3x-6y+7z&=y_1\\ 2x-y+z&=y_2\\ 7x+y-6z&=y_3\\ 2x+2y-4z&=y_4 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 3x_1-2x_2&=y_1\\ x_1-3x_2&=y_2 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=0\\ x_1+x_2&=y_1\\ x_2+x_3&=y_2\\ x_3+x_4&=y_3 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} x_1-x_2-x_3&=y_1\\ x_2+x_3&=y_2\\ x_1-x_3&=y_3 \end{aligned}$$

4. ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ :

(a) $$\begin{aligned} ix+(3i+1)y&=1\\ x-iy&=2 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} (2-i)x+iy-z&=0\\ 2ix-y&=0\\ x-iz&=1 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} (i+1)x-3iy+(1+i/2)z&=-3i/4\\ x+y+iz&=i\\ x-3y-iz&=0 \end{aligned}$$

5. ಒಂದು ವ್ಯೂಹವು n ಅಜ್ಞಾತಗಳಲ್ಲಿ m ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು $m<n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ವ್ಯೂಹವು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ ಅಥವಾ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇದನ್ನು $n=3$ ಆಗಿರುವಾಗ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಿ. (ಇದನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ 2ರ ಅನುಮಿತದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ.

6. Aಯು ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ವ್ಯೂಹದ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿರಲಿ. $i<j$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $Aij=0$ ಮತ್ತು Aಯು $n\times n$ ಆಗಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$Aij=0$ ಆಗಿದ್ದಾಗಲೆಲ್ಲಾ yi (iನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿನ ಸ್ಥಿರಪದ) ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿದ್ದರೆ i ವ್ಯೂಹವು ಒಂದು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು iಗೂ ಕೇವಲ $Aij\neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ವ್ಯೂಹವು ಒಂದು ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ (ನೋಡಿರಿ : ಅಭ್ಯಾಸ 7, ಭಾಗ 1)

7. (a) ಕೇವಲ $ad\neq bc$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $ax+by=y_1$, $cx+dy=y_2$ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನ ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ. (ನೋಡಿರಿ : ಅಭ್ಯಾಸ 8, ಭಾಗ 1.)

(b) ನೀವು ಅಸಮಘಾತ ಪ್ರಸಂಗವೊಂದಕ್ಕೆ ಅಭ್ಯಾಸ 9, ಭಾಗ 1ರ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಬಲ್ಲಿರಾ ?

8. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವ್ಯೂಹವನ್ನೂ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$x+2y=1 \qquad x+2y=1$$
$$x+2.01y=-1, \qquad x+1.99y=-1.$$

ಆ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿರಿ. ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ yನ ಸಹ ಗುಣಕದಲ್ಲಿಯ ಸಣ್ಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ ಪರಿಹಾರಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡುವುದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಇದು ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹಗಳಲ್ಲಿ ಸತ್ಯವಲ್ಲ.

$$x+2y=1 \qquad x+2y=1$$
$$x-2.01y=-1, \qquad x-1.99y=-1,$$

ಇಲ್ಲಿಯೂ ಪರಿಹಾರಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಕಡಮೆ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ. ಈ ಸಂಗತಿಗೆ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಬಲ್ಲಿರಾ ?

(ಪ್ರತಿ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಆಲೇಖಿಸುವುದು ಸಹಾಯಕವಾಗುವುದು.)

9. ಇಳಿಮೇಜಿನ (ಡೆಸ್ಕ್) ಗಣಕಯಂತ್ರದಿಂದ ಎಣಿಕೆ ಮಾಡುವಾಗ ಯಾರಾದರೂ ಏಕ ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳಿಂದ ತುಂಬಿದ ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹರೂಪದ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು, ವಿಷಯುಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಇವನ್ನು ಮಾಡಲು ಒಂದು ವಿಧಾನವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ; $m=n$ ನೊಂದಿಗೆ, Aಯು (3) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇರಲಿ ಮತ್ತು Bಯು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಗಣಿಸಲ್ಪಡಲಿ;

1. Bಯು ಮೊದಲನೆಯ ನೀಟಸಾಲೂ A'ನ ಮೊದಲನೆಯ ನೀಟಸಾಲೂ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ.

2. $B_{1j}=A_{ij}/A_{11}$, $2 \leq j \leq n$, $B_{1(n+1)}=y_1/A_{11}$, ಅಂದರೆ, ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಉಳಿದ ದಾಖಲಾತಿಗಳನ್ನು A_{11} ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

3. $B_{i2}=A_{i2}-B_{i1}\ B_{12}$, $i \geq 2$.

4. $B_{2j}=\dfrac{A_{2j}-B_{21}B_{12}}{B_{22}}$, $j \geq 2$, $B_{2(n+1)}=\dfrac{y_2-B_{21}B_{12}}{B_{22}}$

5. Bಯು iನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು iನೇ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ದಾಖಲಾತಿಗಳನ್ನು ಎಣಿಕೆ ಹಾಕಿದ ಮೇಲೆ ನಾವು $(i+1)$ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು $(i+1)$ನೇ ನೀಟಸಾಲಿನ ದಾಖಲಾತಿಗಳ ಗಣನೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇದೆ:

$i>j$ ಇರಲು $B_{(i+1)j}=A_{(i+1)}-B_{(i+1)1}B_{1j}+B_{(i+1)2}B_{2j}+\cdots+B_{(i+1)(j-1)}B_{(j-1)j}$.

ಮತ್ತು $i<j-1$ ಇರಲು

$$B_{(i+1)j}=\frac{A_{(i+1)j}-B_{(i+1)1}B_{1j}+B_{(i+1)2}B_{2j}+\cdots+B_{(i+1)i}B_{ij}}{B_{(i+1)(i+1)}}$$

$n=3$ ಆಗಿರುವ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ, $A_{11}\neq 0$ ಮತ್ತು $Bii\neq 0$, $i\geq 2$, ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (2)ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರಗಳು ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ,

$$x_3=B_{34},\ x_2=B_{24}-B_{23}x_3,\ \text{ಮತ್ತು}\ x_1=B_{14}-B_{12}x_2-B_{13}x_3.$$

10. (a) ಎರಡು ಅಜ್ಞಾತಗಳ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಒಂದು ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(b) ನಾಲ್ಕು ಅಜ್ಞಾತಗಳ ನಾಲ್ಕು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ವ್ಯೂಹವು ಒಂದು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಒಂದು ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಭಾಗ 3 : ಸದಿಶಸಮಷ್ಟಿಗಳು, ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳು ಮತ್ತು ಆಯಾಮ.

ಹಿಂದಿನ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿಧಾನವೊಂದನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದೆವು. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣ

ವ್ಯೂಹಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದೆ. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ :

$$(1)\qquad \begin{aligned} -2x+y+3z&=0\\ 2x-y-3z&=0\\ -6x+3y+9z&=0. \end{aligned}$$

ಈ ವ್ಯೂಹಕ್ಕೆ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ.

$$(2)\qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3\\ 2 & -1 & -3\\ -6 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

(2) ರ ಸಂಕುಚನೆಯಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಯು ದೊರೆಯುವುದು.

$$(3)\qquad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

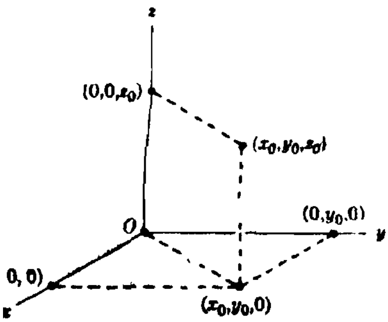
ಹೀಗೆ ಒಂದು ತ್ರಿಗ್ಮ (x, y, z)ಯು (1)ಕ್ಕೆ

(4) $x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z=0$ ಹೀಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗುತ್ತದೆ.

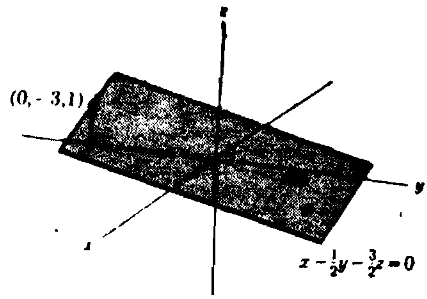
(4) ಎರಡು ನಿರಂಕುಶ 'ಆಯ್ಕೆಗಳನ್ನು' ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. (ಅಂದರೆ, x ಮತ್ತು yಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ, z ಅನ್ನು ಎಣಿಕೆ ಹಾಕಬಹುದು, ಅಥವಾ xಮತ್ತು zಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ, ನಂತರ y ಅನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಬಹುದು, ಅಥವಾ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಾಗಿ y ಮತ್ತು zಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ, ಅನಂತರ x ಅನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಬಹುದು). ಅಂದರೆ ಮೂರು ಅಜ್ಞಾತಗಳಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿವೆವು ಮತ್ತು ಈಗ ಎರಡನ್ನು ನಿರಂಕುಶವಾಗಿ ಆರಿಸಿ ಮೂರನೆಯದನ್ನು (4) ರಿಂದ ಗಣನೆ ಮಾಡಬಲ್ಲೆವು ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿಂದ (1)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ದೊರಕಿಸಬಲ್ಲೆವು. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಕೇಂದ್ರ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯಾಗಿರುವ ಈ 'ಆಯ್ಕೆ'ಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ವಿಕಾಸಗೊಳಿಸಲಾಗುವುದು. ಈ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ, ನಮ್ಮ ಉದಾಹರಣೆ (1)ನ್ನು ಅದರ ಪರಿಹಾರ (4)ರೊಂದಿಗೆ, ಹೆಚ್ಚು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡೋಣ.

ತ್ರಿಗ್ಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ವಿಧಾನವೆಂದರೆ ಮೂರು ಆಯಾಮವುಳ್ಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ (x, y, z) ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಂತೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸು

ವುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಎತ್ತಿಕೊಳ್ಳಿರಿ ; ಅದಕ್ಕೆ 0 ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ. ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು 0 ಮೂಲಕ ಹಾಯಿಸಿರಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲೊಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು x–ಅಕ್ಷ ಎಂದೂ, ಮತ್ತೊಂದನ್ನು y–ಅಕ್ಷ ಎಂದೂ, ಮತ್ತೊಂದನ್ನು z–ಅಕ್ಷ ಎಂದೂ ಕರೆಯಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೂ ಒಂದು ಅಳತೆಯ ಏಕಮಾನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೂ 0 ಯ ಒಂದು ಪಕ್ಷವನ್ನು 'ಧನ' ಪಕ್ಷ ಎಂದೂ 0 ಯ ಮತ್ತೊಂದು ಪಕ್ಷವನ್ನು 'ಋಣ' ಪಕ್ಷ ಎಂದೂ ಕರೆಯಿರಿ. ಆಗ ತ್ರಿಗ್ಮ (x_0, y_0, z_0)ವು ಬಿಂದು p_0ನಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅದರ ಉತ್‌ಕ್ಷೇಪವು x ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ 0 ಯಿಂದ x_0 ಏಕಮಾನಗಳಾಗಿದೆ, ($x_0>0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, 0 ಯ ಧನಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ, $x_0<0$ ಆಗಿದ್ದರೆ 0 ಯ ಋಣಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ), ಅದರ ಉತ್‌ಕ್ಷೇಪವು y– ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ y_0 ಆಗಿದೆ (ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ನಿರ್ದೇಶಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ, ಅಂದರೆ, $y_0>0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಧನಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು $y_0<0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಋಣಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು ಅದರ ಉತ್‌ಕ್ಷೇಪವು z ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ z_0 ಆಗಿದೆ (ಇದೂ ಕೂಡ ನಿರ್ದೇಶಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ). (0, 0, 0) ಬಿಂದುವು O ಯಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಮತ್ತು ಮೂಲಬಿಂದುವೆಂದು ಕರೆಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 1 ನೋಡಿರಿ).



ಚಿತ್ರ–1



ಚಿತ್ರ–2

ಈ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯದೊಂದಿಗೆ (1)ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರಗಳು Oಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ಸಮತಲವಾಗಿ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ; ಅಂದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣವೂ O ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ. [ಇಲ್ಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಸಮೀಕರಣ (4)ರಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣವೂ ಒಂದೇ ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.] (1)ರ ಪರಿಹಾರಗಳು O ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ಸಮತಲವಾಗಿ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. (ಚಿತ್ರ 2 ನೋಡಿರಿ.)

ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹವು ತೀರ ಕ್ಷುದ್ರವಲ್ಲದ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ :

(5)
$$\begin{aligned} 2x+5y+z&=0 \\ x-2y+z&=0 \\ 3x+3y+2z&=0. \end{aligned}$$

ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಸಂಕುಚನೆಯಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

(6)
$$\begin{aligned} x+\tfrac{7}{9}z&=0 \\ y-\tfrac{1}{9}z&=0. \end{aligned}$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 3 ನೋಡಿರಿ.)

(7)
$$\begin{aligned} x-y+z&=0 \\ 2x-y+z&=0 \\ x+y+z&=0 \end{aligned}$$

ಈ ವ್ಯೂಹದ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಸಂಕುಚನೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ

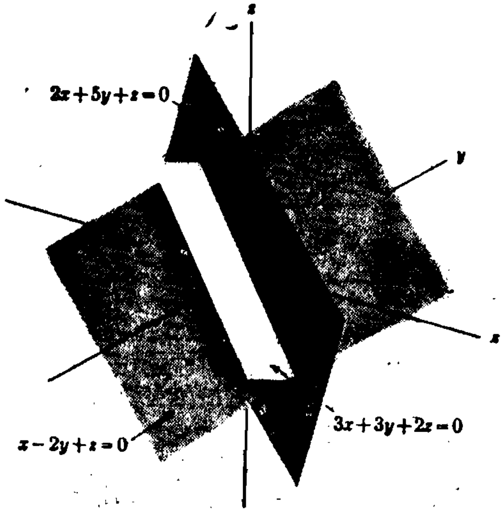
ದೊರೆಯುವ ಪರಿಹಾರವು ಹೀಗಿದೆ :

(8)
$$x=y=z=0.$$

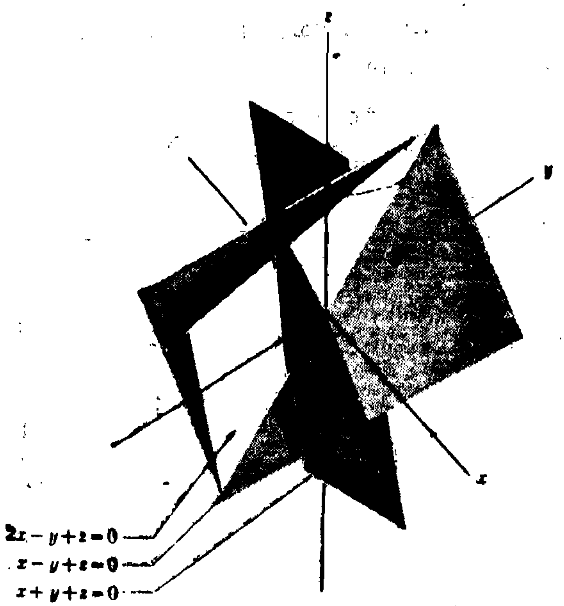
ಇವು Oನ ಸಮೀಕರಣಗಳು. (ಚಿತ್ರ 4 ನೋಡಿರಿ.)

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ನಾವು **ಎರಡು** 'ಆಯ್ಕೆಗಳ'ನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ ಮತ್ತು ಪರಿಹಾರಗಳು ಎರಡು ಆಯಾಮದ ವಸ್ತುವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮತಲವನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತವೆ. (5) ರಲ್ಲಿ ನಾವು **ಒಂದು** 'ಆಯ್ಕೆ'ಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ (6) ರಲ್ಲಿರುವ z ಮತ್ತು (6)ರ ಪರಿಹಾರಗಳು ಒಂದು ಏಕಆಯಾಮದ

ವಸ್ತುವಾಗಿರುವ ಒಂದುರೇಖೆಯಾಗಿ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. (7) ರಲ್ಲಿ ಯಾವ



ಚಿತ್ರ-3. ಒಂದು ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿರುವ ಮೂರು ಸಮತಲಗಳು



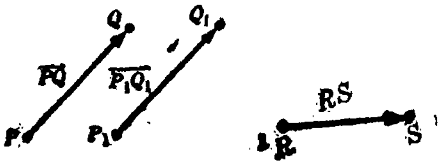
ಚಿತ್ರ-4. ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿರುವ ಮೂರು ಸಮತಲಗಳು

‘ಐಕ್ಯ’ಯೂ ಇಲ್ಲ; ಪರಿಹಾರವು ಶೂನ್ಯ-ಆಯಾಮದ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರುವ ಒಂದು

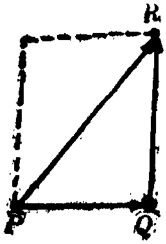
ಬಿಡಿ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. ಈ ರೀತಿ 'ಆಯ್ಕೆಗಳ' ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಿಹಾರಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಆಯಾಮಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುವಂತೆ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಬಹುದು.

ಈ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯಕ ವಿವರಣೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಶಕ್ತಿಯುತವಾಗಿದೆ. ಇಂಥ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳಿಂದಲೇ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಪದವಿಜ್ಞಾನದ ಬಹುಭಾಗ ಹುಟ್ಟುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿಯಲಿದ್ದೇವೆ. ದುರದೃಷ್ಟವಶಾತ್ ಅಂಥ ವಿವರಣೆಯು ಮಿತಿಗೊಳಪಟ್ಟಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಹನ್ನೆರಡು ಅಜ್ಞಾತಗಳಲ್ಲಿನ ಹತ್ತು ಸಮೀಕರಣಗಳಿರಲು ಏನು ಮಾಡಬಹುದು? ಇನ್ನೂ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪರಿಭಾಷೆಯನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು, ಆದರೆ ನಮ್ಮ ನೋಟದ ಗ್ರಹಣಶಕ್ತಿಯು ವಿಫಲಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ. ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಅಪೇಕ್ಷಿಸುತ್ತವೆ. ಇಂಥಲ್ಲಿ ಸಹಾಯ ಮಾಡಲು ಉದಯಿಸಿರುವ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯೇ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ. ಇದು ಕೆಲವು ಭೌತಿಕ ಸಂಗತಿಗಳ ನಿರ್ವಹಣೆಗಾಗಿ ಉದಯಿಸಿದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ ಮತ್ತು ಬಲ ಇವೇ ಮೊದಲಾದ ಅನೇಕ ಭೌತಪರಿಮಾಣಗಳು ಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು ದಿಕ್ಕುಗಳೆರಡನ್ನೂ ಹೊಂದಿವೆ. ಅಂಥ ಪರಿಮಾಣಗಳು ಬಾಣದ ಗುರುತುಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು. ಬಾಣದ ಉದ್ದವು ಗಾತ್ರವನ್ನೂ, ಬಾಣದ ತುದಿಯು ಸೂಚಿಸುವ ದಿಕ್ಕು ಪರಿಮಾಣವು, ವರ್ತಿಸುವ ದಿಕ್ಕನ್ನೂ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆ ನಾವು P ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಕಣದ ಮೇಲೆ ವರ್ತಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಲವನ್ನು P ಯಿಂದ ಹೊರಡುವ ಒಂದು ಬಾಣದ ಗುರುತಿನಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. ಅದರ ಉದ್ದವು ಒತ್ತಡದ ಪರಿಮಾಣವಾಗಿದೆ, ಅದರ ದಿಕ್ಕು ಒತ್ತಡವು ಯಾವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ವರ್ತಿಸುವುದೋ ಅದೇ ದಿಕ್ಕಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಬಾಣವು P ಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ



ಚಿತ್ರ-5



ಚಿತ್ರ-6

Q ಯಲ್ಲಿ ಮುಕ್ತಾಯವಾದರೆ, ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಈ ಬಾಣವನ್ನು $\overrightarrow{PQ}$ ಗುರುತಿನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ; P ಯು PQ ನ **ಆದ್ಯ ಬಿಂದುವೆಂದೂ**, Q **ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವೆಂದೂ** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.(ಚಿತ್ರ 5 ನೋಡಿರಿ.)

ಹೀಗೆ ಬಾಣದ ಗುರುತಿನಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಡಬಹುದಾದಂಥ ಬಲದಂತಹ ಪರಿಮಾಣ ವೊಂದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ **ಸದಿಶ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿ ಇದೇ ಬಲವು ಮತ್ತೊಂದು ಬೇರೆ ಬಿಂದು P_1 ನಲ್ಲಿರುವ ಕಣದ ಮೇಲೆ ವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಮತ್ತು ಈ ಕಾರಣದಿಂದ P, Q ಎಂಬ $\overrightarrow{PQ}$ ನಷ್ಟೇ ಉದ್ದವಿರುವ ಅದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ವರ್ತಿಸುವ ಬಾಣವೊಂದರಿಂದಲೂ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಡಬಹುದು. ಬೇರೆ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ ಒಂದೇ ಸದಿಶವು ನಾನಾ ಬಾಣಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಡಬಹುದು. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, ಎರಡೂ ಬಾಣಗಳು ಒಂದೇ ಸದಿಶವನ್ನೇ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು ಕೇವಲ ಅವು ಒಂದೇ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ. (ಚಿತ್ರ 5 ನೋಡಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ $\overrightarrow{PQ}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{P_1 Q_1}$ ಗಳು ಒಂದೇ ಸದಿಶ ವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತಿವೆಯಾದರೆ $\overrightarrow{RS}$ ಬೇರೊಂದು ಸದಿಶವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತಿದೆ.

ಎರಡು ಬಲಗಳು P ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದೇ ಕಣದ ಮೇಲೆ ವರ್ತಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಏಕಕಾಲಿಕವಾಗಿ ವರ್ತಿಸುತ್ತಿರುವ ಎರಡೂ ಬಲಗಳ ಫಲಿತವು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಲವಾಗಿದೆ. ಈ ಫಲಿತಬಲವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದು. $\overrightarrow{PQ}$ ಮೊದಲ ಬಲವನ್ನೂ ಮತ್ತು $\overrightarrow{QR}$ ಎರಡನೇ ಬಲವನ್ನೂ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಿ. ಆಗ ಫಲಿತ ಬಲವು $\overrightarrow{PR}$ ಬಾಣದಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 6 ನೋಡಿರಿ.) $\overrightarrow{PR}$ ಬಾಣವು, $\overrightarrow{PQ}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{QR}$ ಬಾಣಗಳ **ಸದಿಶ ಮೊತ್ತ** ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ನಾವು ಒಂದು ಬಾಣದ 'ಗುಣಕ'ವನ್ನೂ ಕೂಡ ವಿವರಿಸಬಹುದು. P ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಕಣದ ಮೇಲೆ ವರ್ತಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಲವು F ಮತ್ತು a ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಆಗ aF ಯು F ನ ಗಾತ್ರದ $|a|$ ಆವರ್ತಿ ಗಾತ್ರದ್ದಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $a>0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ದಿಕ್ಕೂ F ನ ದಿಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ಎಂದೂ, $a<0$ ಆಗಿದ್ದರೆ F ಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ. $\overrightarrow{PQ}$ ಯು F ಅನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು $\overrightarrow{PR}$ ಯು aF ಅನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ, ಆಗ $\overrightarrow{PR}$ ನ ಉದ್ದವು $\overrightarrow{PQ}$ ನ ಉದ್ದ $|a|$ ಆವರ್ತಿ ಇದೆ ಮತ್ತು $a>0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\overrightarrow{PR}$ ಕೂಡ $\overrightarrow{PQ}$ ನ ದಿಕ್ಕನ್ನೇ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು $a<0$ ಇರಲು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $\overrightarrow{PR}$ ಅನ್ನು $a\overrightarrow{PQ}$ ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ; $\overrightarrow{PR}$ ಅನ್ನು **ಅದಿಶ** ಅಂದರೆ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ a ಯಿಂದ $\overrightarrow{PQ}$ ನ **ಅದಿಶ ಗುಣಕ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(ಚಿತ್ರ 7ರಲ್ಲಿ 2 $\overrightarrow{PQ}$ $\overrightarrow{PR}$ ನಿಂದಲೂ ಮತ್ತು $-\frac{2}{3}$ PQ, $\overrightarrow{PS}$ ನಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಅಲ್ಲದೆ PQಯು $\frac{1}{2}$ PR ಮತ್ತು $\overrightarrow{PR}$, $-\frac{4}{3}$ $\overrightarrow{PS}$ ಅನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.)



ಚಿತ್ರ-7

ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸದಿಶಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು ಬಾಣಗಳನ್ನೂ ಸ್ಫುಟವಾದ ಸಣ್ಣಗಾತ್ರದ ದೊಡ್ಡಕ್ಷರಗಳಿಂದ, ಅಡಿಬರಹದೊಂದಿಗೆ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲದೆಯೇ ಸಂಕೇತಿಸೋಣ. ಶೂನ್ಯ ಸದಿಶವು ಗಾತ್ರವಿಲ್ಲದ ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ನಿರಂಕುಶ ದಿಕ್ಕನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸದಿಶವನ್ನು 0 ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾವು $\mathbf{v}_1$ ಮತ್ತು $\mathbf{v}_2$ಗಳ ಸದಿಶ ಮೊತ್ತವನ್ನು $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸೋಣ. a ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ನಾವು $\mathbf{v}$ಯ ಅದಿಶ ಗುಣಕ a ಯನ್ನೂ $a\mathbf{v}$ ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸದಿಶ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಅದಿಶ ಗುಣಕಗಳ ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳು, ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೂಡುವಿಕೆಯ ಮತ್ತು ಅದಿಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ (ಅಂದರೆ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ) ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಸಾಮಾನ್ಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಗೊಳಿಸಲು ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸುತ್ತೇವೆ :

(a) $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1$.

(b) $(\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_1)+\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_0+(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)$.

(c) $\mathbf{v}+\mathbf{o}=\mathbf{v}$ ಆಗಿರುವಂತೆ, $\mathbf{o}$ ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ, ಸದಿಶವೊಂದು ಇದೆ.

(d) ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸದಿಶ $\mathbf{v}$ ಯು ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವಾಗ,

(9) $\mathbf{v}+(-1)\mathbf{v}=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ $-1(\mathbf{v})$ ಎಂಬ ಸದಿಶವೊಂದು ಇದೆ.

(e) $a(b\mathbf{v})=(ab)\mathbf{v}$.

(f) $(a+b)\mathbf{v}=(a\mathbf{v}+b\mathbf{v})$.

(g) $a(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=a\mathbf{v}_1+a\mathbf{v}_2$.

(h) $1\mathbf{v}+\mathbf{v}$.

ಇವು ಘಟಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬ ಪ್ರತಿಪಾದನೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಬಿಟ್ಟಿದೆ. ನಿರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿನ್ಯಾಸ ಇದೇ ಆಗಿದೆ. ಮುಂದೆ ನೋಡುವಂತೆ (9) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ವಿನ್ಯಾಸವು, ಹನ್ನೆರಡು ಅಜ್ಞಾತಗಳಲ್ಲಿನ ಹತ್ತು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಬಗೆಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸಲು ಶಕ್ತರನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಅದೂ ಅಲ್ಲದೆ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನದನ್ನೂ ಮಾಡಬಲ್ಲೆವು. ಇಲ್ಲಿ ಬೇಕಾಗಿರುವುದೆಲ್ಲ (9)ರ ನಿಯಮಗಳು. ಅದಿಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಡನೆ (ಅಂದರೆ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಡನೆ) ಕೂಡುವುದರಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಗುಣಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದು (9)ರ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದೋ ಅದನ್ನು ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ, ಅಥವಾ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮಷ್ಟಿ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕಾದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಇದೆ,

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಒಂದು ಮೊತ್ತಕ್ರಿಯೆ $X+Y$ ಮತ್ತು ಅದಿಶಗುಣಾಕಾರ aX ಗಳು ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವಂತೆ νಯ ಘಟಕಗಳಿಗಾಗಿ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, ಆಗ ν ವಸ್ತುಗಳ ಒಂದು ಸಂಗ್ರಹವಿರಲು ಅದರ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ **ಸದಿಶ**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಗುಂಪನ್ನು ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(a) X ಮತ್ತು Y ಗಳು Vಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ $X+Y$ಯು Vಯಲ್ಲಿದೆ.

(b) i. $X+Y=Y+X$.

ii. $X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$.

iii. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ Oಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲ್ಪಡುವ Vಯ ಒಂದು ಘಟಕವು Vಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ Xಗೆ $X+O=X$ ಆಗಿರುವಂತೆ, ಇದೆ.

(10) iv. Vಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು Xಗೆ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $-X$ ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲ್ಪಡುವ Vಯ ಘಟಕವೊಂದು $X+(-X)=O$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಇದೆ.

(c) V ಯಲ್ಲಿ X ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು a ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ aXಯು Vಯಲ್ಲಿದೆ.

(d) i. $a(bX)=(ab)X$.

ii. $(a+b)X=aX+bX$.

iii. $a(X+Y)=aX+aY$.

iv. $1X=X$.

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೀಜಗಣಿತದ ನಿಯಮಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯು ವಿವರಿಸಲ್ಪಡಬೇಕೆಂದು ಒತ್ತಿ ಹೇಳಲಾಗುವುದು. 'ಸದಿಶ' ಮತ್ತು 'ಸಮಷ್ಟಿ' ಎಂಬ ಪದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೂ ಕೂಡ, ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ಭೌತಿಕವಾಗಿ ಅಥವಾ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಯೋಚಿಸಲಾಗುವುದೆಂದು ಅರ್ಥವಲ್ಲ. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯು ಬೀಜಗಣಿತದ ಒಂದು ವಸ್ತುವಾಗಿದೆ. ಇದರ ಸಂಬಂಧವು ಹಿಂದೆ ಕೊಟ್ಟ ಬಾಣದ ಗುರುತುಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯೊಂದಿಗೆ, ಕೂಡುವಿಕೆ ಮತ್ತು ಅದಿಶ ಗುಣಾಕಾರಗಳು (10)ರ ನಿಯಮಗಳನ್ನೇ ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದಷ್ಟೇ ಆಗಿದೆ. ಈ ಕೆಳಗೆ ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡುವಂತೆ, ಅನೇಕ ಗಣಿತದ ವಿನ್ಯಾಸಗಳು ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ; ಅಂದರೆ, (10)ರ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ ಒಂದು ಮೊತ್ತಕ್ರಿಯೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅದಿಶ ಗುಣಾಕಾರ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು. ಇವುಗಳಿಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ನೀಡಬಹುದು.

ಹೆಚ್ಚು ಗಣನೀಯ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಒಂದು ವರ್ಗವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. n ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ, (ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ), $n \geq 1$. ಒಂದು (ಕ್ರಮಪಡಿಸಿದ) *n-tuple* $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ ರೂಪದ ಒಂದು ಗಣವಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ (x, y) ಒಂದು ಜೋಡಿ ಅಥವಾ 2–*tuple*, ಆಗಬಹುದು ಮತ್ತು $(1,2,4,1,0)$ ಒಂದು 5–*tuple* ಆಗಬಹುದು. ಎಲ್ಲ ಕ್ರಮಪಡಿಸಿದ n–*tuple* ಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು R^n ಆಗಿರಲಿ. R^n ನಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಮೊತ್ತ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದು ಅದಿಶ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವಿವರಿಸಬಹುದು :

$$(11)\qquad \begin{aligned} &(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n) \\ &a(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (ax_1, ax_2, \cdots, ax_n). \end{aligned}$$

ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಈ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು (10)ರ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದಲೇ R^nಯು, **n–ಆಯಾಮದ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಸಮಷ್ಟಿ** ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ. ಸದಿಶದಲ್ಲಿ, ಎಂದರೆ, n–tuple $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ನಲ್ಲಿ, x_iಯು iನೆ ಸ್ಥಾನ ನಿರ್ದೇಶಕ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಬಹುಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಬಯಸಿದರೆ, 'ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ' ಪದವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ, 'R^n' ನಿಂದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಇಲ್ಲಿನ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕಾರ್ಯಕ್ಕೆ R^1 ಅಥವಾ R^2 ಮಾತ್ರ ಸಾಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅನೇಕ ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ

ವಿವರಿಸಿದ ಬಾಣದ ಗುರುತುಗಳ ಸದಿಶ ಸಮುಷ್ಟಿಯು ಇಲ್ಲಿನ ಉದ್ದೇಶಗಳಿಗೆ ಯೋಗ್ಯ ವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೇಗಾದರೂ, ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಮೂದಿಸುವಾಗ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪದ ವಾದ 'ಸದಿಶಸಮುಷ್ಟಿ'ಯನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ, ನಮ್ಮ ಕೆಲಸದ ಬಹುಭಾಗವು (10)ರ ನಿಯಮಗಳ ಪರಿಣಾಮವೇ ಆಗಿದೆ. ನಾವು ಒಂದು 'ಸದಿಶಸಮುಷ್ಟಿ'ಯನ್ನು V ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ, $X, Y, X^1, X^2, \ldots, Y^1, Y^2, Y^3, Z, Z^1, Z^2$ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಿಂದ ಮತ್ತು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು a, b, c ಇತ್ಯಾದಿಗಳಿಂದ. $V = R^n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ನಾವು V ಯಲ್ಲಿನ ಸದಿಶಗಳನ್ನು n – tuple ಗಳಾದ $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ಅಥವಾ $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ ಗಳಿಂದ ಅಥವಾ X, Y ಇತ್ಯಾದಿ ಗಳಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಬಹುದು. ವಿವಿಧ ವಿಶೇಷ ಪ್ರಸಂಗಗಳು ಉದ್ಭವಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿರುವ ಅಂಕನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಬಾಣದ ಗುರುತುಗಳ ಸದಿಶ ಸಮುಷ್ಟಿಯನ್ನು V ಯಿಂದ ಮತ್ತು ಅದರ ಘಟಕಗಳನ್ನು v_0, v_1 ಇತ್ಯಾದಿಗಳಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲಾಗುವುದು.

R^3 ಸದಿಶ ಸಮುಷ್ಟಿಯನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಚಿತ್ರ 1 ರಲ್ಲಿಯಂತೆ ತೋರಿಸ ಬಹುದು. R^2 ಮತ್ತು R^1 ಗಳಿಗೂ ಕೂಡ ಇಂಥವೇ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯಗಳನ್ನು ರಚಿಸ ಬಹುದು. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ R^1 ಅನ್ನು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಡನೆ ಸಾಮ್ಯೀಕರಿಸ ಲಾಗುವುದು. R^3 ಸಮುಷ್ಟಿಯನ್ನು V ಸಮುಷ್ಟಿ ಎಂದೂ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ (x, y, z)ಯು, R^3 ನಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿರಲು, ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು $(0,0,0)$ ನಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ ಮತ್ತು (x, y, z) ನಲ್ಲಿ ಮುಕ್ತಾಯವಾಗುವ ಬಾಣದ ಗುರುತಿ ನಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. ಈ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯವು R^3 ಮತ್ತು V ಎರಡರಲ್ಲೂ ಕೂಡು ವಿಕೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳನ್ನು ಕಾಯ್ದಿರಿಸುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ (x_0, y_0, z_0) ಯು v_0ಗೆ, ಮತ್ತು (x, y, z) ಯು v_1ಗೆ ಅನುಗುಣವಾದರೆ, (ಆಗ $x_0 + x_1$, $y_0 + y_1$, $z_0 + z_1$) ಯು $v_0 + v_1$ಗೆ ಮತ್ತು (ax_0, ay_0, az_0) ಯು av_0 ಗೆ ಅನು ಗುಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಗಾಗಿ ಬಿಟ್ಟಿದೆ. ಸದಿಶ ಸಮುಷ್ಟಿ ಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಭಾಗ 5ಕ್ಕೆ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

ಸದಿಶ ಸಮುಷ್ಟಿಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಈ ವಸ್ತುಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ಯಾವುವು ? (1) ರಿಂದ (8)ರ ವರೆಗೆ ಇರುವ ನಮ್ಮ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಜ್ಞಾತಗಳಲ್ಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳು ಸಮತಲಗಳಂತೆ, ರೇಖೆ ಗಳಂತೆ ಅಥವಾ ಬಿಂದುಗಳಂತೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಡಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಾಯಿತು. ಹೀಗೆ ಪರಿಹಾರಗಳು R^3ನ ಕೆಲವು ಉಪಗಣಗಳಂತೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಡಬಹುದಾಗಿವೆ. ಆ ಉಪಗುಣಗಳು, ಎಂದರೆ, ಸಮತಳಗಳು, ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಬಿಂದುಗಳು ಇವನ್ನು

ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡಬಹುದೇ? ಸಮತಳಗಳು, ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಬಿಂದುಗಳಿಲ್ಲದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಉಪಗುಣಗಳೂ ಇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ? ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬಯಸುವ ಉಪಗುಣಗಳು ವಿವರಿಸಲು ಸುಲಭವಾಗಿವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ Vಯ ಒಂದು **ಉಪಸಮಷ್ಟಿ** M ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳೊಡನೆ V ಯ ಒಂದು ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ.

(a) O ಯು M ನಲ್ಲಿದೆ.

(12) (b) X ಮತ್ತು Yಗಳು M ನಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ $X+Y$ಯು Mನಲ್ಲಿದೆ.

(c) X, M ನಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು aಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ aX ಯು Mನಲ್ಲಿದೆ.

Vಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು Vಯಲ್ಲಿ ನೆರವೇರಿಸಬಹುದಾದಂತಹ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ನೆರವೇರಿಸಬಹುದಾದ ಒಂದು ಉಪಗುಣ M ಆಗಿದೆ. **M ನಲ್ಲಿಲ್ಲದ** ಒಂದು ಸದಿಶವನ್ನು **ಎಂದಿಗೂ ಪಡೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ**. ಹೀಗೆ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ (b) ಗುಣಧರ್ಮವು, M ನಲ್ಲಿ ಮೊತ್ತಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಡೆಸಬಹುದೆಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ ಮತ್ತು (c) ಗುಣಧರ್ಮವು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಬಹುದೆಂದೂ ಮತ್ತು M ನಲ್ಲಿಯೇ ಉಳಿಯಬಹುದೆಂದೂ ಹೇಳುತ್ತದೆ. (c) ಗುಣಧರ್ಮದಿಂದ Mನಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $-X=(-1)X$ ಇದು M ನಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ M ನಲ್ಲೂ ಕಳೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ M ಸ್ವಯಂ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ Vಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು ಕೇವಲ ಒಂದು ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ. ಇದು Vಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಗಳೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯೂ ಕೂಡ ಆಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ.

(x_0, y_0, z_0) ಯು (1)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿರಲು ಮತ್ತು (x_1, y_1, z_1) ಯು (1) ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

(13)
$$\begin{aligned} -2x_0+y_0+3z_0&=0 & \qquad -2x_1+y_1+3z_1&=0\\ 2x_0-y_0-3z_0&=0 \quad \text{ಮತ್ತು} & 2x_1-y_1-3z_1&=0\\ -6x_0+3y_0+9z_0&=0, & -6x_1+3y_1+9z_1&=0. \end{aligned}$$

ನಾವು $(x_0, y_0, z_0)+(x_1, y_1, z_1)=(x_0+x_1, y_0+y_1, z_0+z_1)$

ಮೊತ್ತವನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದೂ (1)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ:

$$(14)\quad \begin{aligned} &-2(x_0+x_1)+(y_0+y_1)+3(z_0+z_1) \\ &\qquad =(-2x_0+y_0+3z_0)+(-2x_1+y_1+3z_1)=0 \\ &2(x_0+x_1)-(y_0+y_1)-3(z_0+z_1) \\ &\qquad =(2x_0-y_0-3z_0)+(2x_1-y_1-3z_1)=0 \\ &-6(x_0+x_1)+3(y_0+y_1)+9(z_0+z_1) \\ &\qquad =(-6x_0+3y_0+9z_0)+(-6x_1+3y_1+9z_1)=0. \end{aligned}$$

(13) ನಿಜವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (14) ಸಹ ನಿಜವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇವೇ ರೀತಿ, $a\ (x_0,y_0,z_0)=(ax_0,ay_0,az_0)$ ಅನ್ನು ರೂಪಿಸಿರಿ. ಆಗ (1) ಕ್ಕೆ $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದ್ದರೆ, $(ax_0,\ ay_0,\ az_0)$ ಕೂಡ ಪರಿಹಾರ ಆಗಿದೆ. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ $(0,0,0)$ ವು (1) ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ; (1) ಕ್ಕೆ (x_0,y_0,z_0) ಮತ್ತು (x_1,y_1,z_1) ಗಳು ಪರಿಹಾರಗಳಾಗಲು $(x_0+x_1,\ y_0+y_1,z_0+z_1)$ ಕೂಡ ಒಬದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು (x_0,y_0,z_0) ವು (1) ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ (ax_0,ay_0,az_0) ಕೂಡ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ ಆಗಿದೆ, ಇದರಿಂದ (1)ರ ಬಗ್ಗೆ ಎಲ್ಲ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಪರಿಹಾರಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು $\mathbf{R}^3$ನ ಒಂದು ಉಪಸಮುಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರಬೇಕು,

ಇಂಥದೇ ಒಂದು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, (5)ರ ಎಲ್ಲ ಪರಿಹಾರಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು $\mathbf{R}^3$ನ ಒಂದು ಉಪಸಮುಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ. (7)ರ ಎಲ್ಲ ಪರಿಹಾರಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು ಸಹ $\mathbf{R}^3$ನ ಒಂದು ಉಪಸಮುಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ. ಒಂದು ವಾಕ್ಯ ಇದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರಬೇಕು :

ಕೆಳಗಿರುವಂತಹ ಎಲ್ಲ n–tuples ($(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು ಅಂದರೆ,

$$(15)\quad \begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= 0 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_2\ x_n &= 0 \\ &\vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{R}^n$ ಒಂದು ಉಪಸಮುಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ. ಈ ಉಪಸಮುಷ್ಟಿಯನ್ನು $A=(Aij)$ ಮಾತೃಕೆಯ **ಶೂನ್ಯಸಮುಷ್ಟಿ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು.

ಹೀಗೆ (2)ರ ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯು (1)ರ ಎಲ್ಲ ಪರಿಹಾರಗಳ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿದೆ. ಇದೂ (3)ರ ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿ ಆಗಿದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಯ ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯು

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(5)ರ ಪರಿಹಾರಗಳ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿದೆ. ಇದು ಕೆಳಗಿನದರ ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯೂ ಆಗಿದೆ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ಹಾಗೆಯೇ ಕೆಳಗಿನದರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯೂ ಆಗಿವೆ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

ಕೆಳಗಿನದರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿ

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(7)ರ ಪರಿಹಾರಗಳ ಗಣವಾಗಿದೆ, ಅಂದರೆ, ಬಿಡಿಸದಿಶ (0,0,0).

ಈ ಕೊನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯು ಸ್ವಲ್ಪ ಸ್ವಾರಸ್ಯವಾಗಿದೆ. V, ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಕೂಡಲೇ Vಯ ಎರಡು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಬಹುದು. M ಕೇವಲ ಶೂನ್ಯಸದಿಶವನ್ನೇ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆಗ M ಖಂಡಿತವಾಗಿ (12)ನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದರಿಂದ, M ಯು V ಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗುತ್ತದೆ. M ಅನ್ನು Vಯ **ಶೂನ್ಯ** ಉಪಸಮಷ್ಟಿ ಎಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಕಾರಣಗಳಿಗಾಗಿ, Vಯ **ಕ್ಷುದ್ರ** ಉಪಸಮಷ್ಟಿ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. Vಯು ಸ್ವಯಂ ತನ್ನದೇ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗುವಂತೆ, V ಸಮಷ್ಟಿಯು ಸ್ವಯಂ (12)ರ ಕರಾರುಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. Mಯು Vಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $M \neq V$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ M ಅನ್ನು ಒಂದು **ಯುಕ್ತ** ಉಪಸಮಷ್ಟಿ ಎಂದ ಕರೆಯಲಾಗುವುದು.

ಟೀಕೆಗಳು : $(0,0,0)$ ಮೂಲಕ ಹಾಯುವ ಒಂದು ರೇಖೆ ಅಥವಾ ಒಂದು ಸಮತಲವು R^3ನ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ಮತ್ತು ಇವು R^3ನ ಏಕ ಸೂತ್ರ ಅಕ್ಷದ್ರ ಮತ್ತು ಯುಕ್ತ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳೆಂದೂ ತೋರಿಸುವುದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವು R^3ನ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲ. $(0,0,0)$ ಮೂಲಕ ಹಾಯದಿರುವ ರೇಖೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಏನು? ಇವೂ ಕೂಡ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳು ಅಲ್ಲ; ಆದರೂ ಅವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಬೈಜಿಕವಾಗಿಲ್ಲವಿದ್ದರೂ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಅದೇ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾಯದಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೆ ಅಥವಾ ಸಮತಲವು, ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾಯ್ದಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೆ ಅಥವಾ ಸಮತಲದ ರೂಪಾಂತರ ಮಾತ್ರವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯ ರೂಪಾಂತರವಾಗಿದೆ. ನಾವು ಇದನ್ನು ಮುಂದೆ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸೋಣ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳಾಗಿರುವ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಉಪಗಣಗಳ ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು ಹಾಗಿಲ್ಲದಿರುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನೂ ಅಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

'ಆಯಾಮ' ಮತ್ತು 'ಆಧಾರ'ಯ ಸಂಕಲ್ಪನಗಳೇನು? ಈ ಸಂಕಲ್ಪನಗಳು ಸ್ವಲ್ಪಮಟ್ಟಿಗೆ ಸರಳವಾದ ಬೈಜಿಕ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಮತ್ತೆ ನಾವು (1) ನ್ನು ಅವಲೋಕಿಸೋಣ. ಕೇವಲ $x_0 - \frac{1}{2}y_0 - \frac{3}{2}z_0 = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, ಅಂದರೆ, (4) ಸಾಧಾರವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, (x_0, y_0, z_0)ವು (1) ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿದೆವು. ಮುಂದಿನಂತೆ, (1) ಕ್ಕೆ ಎರಡು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ; $y_0 = 1$, $z_0 = 0$ ಆಗಿರಲಿ; ಸದಿಶ $X = (\frac{1}{2}, 1, 0)$ ಅನ್ನು ಪಡೆಯಲು (4) ರಿಂದ x_0 ಅನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ. $y_0 = 0$, $z_0 = 1$ ಆಗಿರಲಿ; ಸದಿಶ $Y = (\frac{3}{2}, 0, 1)$ ಅನ್ನು ಪಡೆಯಲು (4) ರಿಂದ x_0 ಅನ್ನು ಗುಣಿಸಿರಿ. ಆಗ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ :

(16) X ಮತ್ತು Y ಗಳು (2) ರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿವೆ; ಅಂದರೆ X ಮತ್ತು Y ಗಳೆರಡೂ (1) ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರಗಳಾಗಿವೆ.

(17) a ಮತ್ತು b ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $Z = aX + bY$ ಯು (2) ರ ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿದೆ.

(16) ಸಫಲವಾಗುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು (2), R^3ನ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಈಗ $Z = (x_1, y_1, z_1)$ ಎನ್ನುವುದು (2) ರ ಶೂನ್ಯ

ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಸದಿಶವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ (4) ರಿಂದ $x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{3}{2}z_1$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. $W = y_1 X + z_1 Y$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$$W = y_1(\tfrac{1}{2}, 1, 0) + z_1(\tfrac{3}{2}, 0, 1) = (\tfrac{1}{2}y_1 + \tfrac{3}{2}z_1, y_1, z_1) = Z.$$

ಇದು ಕೆಳಗಿನದನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತದೆ.

(18) $Z = (x_1, y_1, \ldots$ ಯು (2) ರ ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ $Z = y_1 X + z_1 Y$.

ಹೇಳಿಕೆ (18) ಇದು (1) ರ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವು X ಮತ್ತು Y ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪರಿಹಾರಗಳ ಮೇಲೆ 'ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತದೆ' ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. (17) ಮತ್ತು (18) ಹೇಳಿಕೆಗಳು X ಮತ್ತು Y ಗಳು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ (2) ರ ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು 'ವಿವರಿಸುತ್ತವೆ' ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದು. X ಮತ್ತು Y ಗಳೆರಡನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸ ಬೇಕೇ ಅಥವಾ ಅವುಗಳಲ್ಲೊಂದೇ ಸಾಕೇ? ಇದೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಬೇರೆ ರೀತಿ ಹೇಳ ಬೇಕೆಂದರೆ, X ಎನ್ನುವುದು Y ಮೇಲೆ 'ಅವಲಂಬಿಸಿದೆಯೇ,' ಅಥವಾ Y ಯು X ಮೇಲೆ 'ಅವಲಂಬಿಸಿದೆಯೇ'? ಯಾವುದೋ a ಗೆ $X = aY$ ಆಗಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟು ಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $(\frac{1}{2}, 1, 0) = a(\frac{3}{2}, 0, 1) = (\frac{3}{2}a, 0, a)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು. ಇದು ಯಾವುದೇ a ಗೂ ನಿಜವಾಗಲಾರದು. ಇದನ್ನು ಹೇಳಲು ಅತ್ಯಂತ ಸರಳ ವಿಧಾನವು ಹೀಗಿದೆ:

(19) $aX + by = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $a = b = 0$.

(2) ರ ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶವೂ X ಮತ್ತು Y ಗಳ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸುವಂತೆ (2) ರ ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ, X ಮತ್ತು Y ಹೆಸರಿನ ಎರಡು ಸದಿಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. [(18) ರಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತ ಪಡಿಸಿರುವಂತೆ], ಇದು X ಮತ್ತು Y ಗಳು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿರುವಾಗ [(19) ರಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರುವಂತೆ], ನಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆ X ಮತ್ತು Y ಕೇವಲ ಮಿಥ್ಯೆಯೇ? ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ಕೇವಲ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸದಿಶದಿಂದ ವಿವರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿತ್ತೇ? ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಆಯ್ಕೆಯು, ಮೂರು ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಅಪೇಕ್ಷಿಸಬಹುದೆಂಬುದು ಸಾಧ್ಯವೇ? Z, (2) ರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರಲಿ ಮತ್ತು X ಮತ್ತು Y ಗಳು Z ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಂದರೆ $X = aZ$ ಮತ್ತು $Y = bZ$. $ac_1 + bc_2 = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ, c_1 ಮತ್ತು c_2 ಗಳನ್ನು, ಎರಡೂ

ಸೊನ್ನೆಗಳಾಗಿಲ್ಲದಿರುವಂತೆ ಆರಿಸಿರಿ. ಪ್ರಮೇಯ 2 ರ ಅನ.ಮಿತದಿಂದ ಇದನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆಗ

$$c_1X + c_2Y = c_1aZ + c_2bZ = (c_1a + c_2b)Z = 0.$$

ಇದು (19) ಕ್ಕೆ ವಿರೋಧ. ಹೀಗೆ (2) ರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಸದಿಶದಿಂದ ವಿವರಿಸಲು **ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ**.

ಈಗ $U = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3)$ ಮತ್ತು $W = (w_1, w_2, w_3)$ ಗಳು (2) ರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಸದಿಶ ಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ (17) ರಿಂದ $U = u_2X + u_3Y$, $V = v_2X + v_3Y$ ಮತ್ತು $W = w_2X + w_3Y$ ಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. c_1, c_2, c_3 ಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲವೂ ಸೊನ್ನೆ ಗಳಾಗಿಲ್ಲದಿರುವಂತೆ, ಹೀಗೆ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರಿ :

$$(20) \qquad \begin{aligned} u_2c_1 + v_2c_2 + w_2c_3 &= 0 \\ u_3c_1 + v_3c_2 + w_3c_3 &= 0. \end{aligned}$$

ಹೇಳಿಕೆ (20), ಮತ್ತೆ ಪ್ರಮೇಯ (2) ರ ಅನುಮಿತದ ಒಂದು ಅನ್ವಯವಾಗಿದೆ ಏಕೆಂದರೆ, ಮೂರು ಅಜ್ಞಾತ [c_1, c_2 ಮತ್ತು c_3] ಗಳಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ಗಣವಾಗಿದೆ. (20) ಈ ಕಾರಣದಿಂದ ಅದು ಒಂದು ಅಕ್ಷುಪ್ರ ಪರಿಹಾರ ವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. c_1, c_2, ಮತ್ತು c_3 ಗಳ ಈ ಆಯ್ಕೆಯೊಡನೆ ನಾವು ಕೆಳಗಿರು ವುದನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ,

$$\begin{aligned} c_1U + c_2V + c_3W &= c_1(u_2X + u_3Y) + c_2(v_2X + v_3Y) \\ &\qquad + c_3(w_2X + w_3Y) \\ &= (u_2c_1 + v_2c_2 + w_2c_3)X + (u_3c_1 + v_3c_2 + w_3c_3)Y \\ &= 0X + 0Y = 0. \end{aligned}$$

ಇದು ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತದೆ:

(21) U, V ಮತ್ತು W ಗಳು (2) ರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ ನಾವು c_1, c_2 ಮತ್ತು c_3 ಗಳನ್ನು, ಎಲ್ಲವೂ ಶೂನ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವಂತೆ, $c_1U + c_2V + c_3W = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

(2) ರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳು 'ಅವಲಂಬಿತ'ವಾಗಿರಲೇಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಇದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈಗ 'ಆಯಾಮ'ದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗೆ ಒಳ್ಳೆಯ ಸ್ಥಾನಾನ್ವೇಷಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. (1) ರ ಪರಿಹಾರಗಳು, ಒಂದು ಎರಡು-ಆಯಾಮದ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರುವ, ಒಂದು ಸಮತಲವಾಗಿ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಈ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ಒಂದು ಸದಿಶದಿಂದ ವಿವರಿಸಲಾಗದು ಮತ್ತು ಎರಡು 'ನಿರವಲಂಬಿತ' ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳು ಒಂದು 'ಅವಲಂಬನೆ'ಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರಲೇಬೇಕೆಂಬ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ; ಅಂದರೆ, ಮೂರು ಸದಿಶಗಳು ತೀರ ಹೆಚ್ಚಾದವು. ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯ ಆಯಾಮವು, ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು 'ವಿವರಿಸುವಂತಹ', 'ನಿರವಲಂಬಿತ' ಸದಿಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬೇಕು. ನಾವು ಈ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸೋಣ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಸದಿಶಗಳ ಒಂದು ಸಂಗ್ರಹ $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ವನ್ನು,

(22)

(a) $c_1X^1 + c_2X^2 + \cdots + c_kX^k = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ನಾವು $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು, ಎಲ್ಲವೂ ಸೊನ್ನೆಗಳಾಗಿಲ್ಲದಿರುವಂತೆ, ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಾದರೆ, ಅದನ್ನು **ಅವಲಂಬಿತ** ಎಂದೂ,

(b) ಅದು ಅವಲಂಬಿತವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ, $c_1X^1 + c_2X^2 + \cdots + c_kX^k = 0$ ಎನ್ನುವುದು $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದರೆ ನಿರವಲಂಬಿತ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅನೇಕ ಸಲ $c_1X^1 + c_2X^2 + \cdots + c_kX^k$ ರೂಪದ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂಥ ಮೊತ್ತಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಹೆಸರು ಇದೆ.

(23) $c_1X^1 + c_2X^2 + \cdots + c_kX^k$ ರೂಪದ ಒಂದು ಮೊತ್ತವನ್ನು $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಗಣದ ಒಂದು **ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ, (2) ರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶವು X ಮತ್ತು Y ಗಳ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿದೆ. [ಇದು (18)] ಎಂದೂ, X ಮತ್ತು Y ಗಳ ಯಾವುದೇ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯು (2) ರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿದೆ [ಇದು (17)] ಎಂದೂ ಮತ್ತು X ಮತ್ತು Y ಗಳು

ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿವೆ [ಇದು (19)] ಎಂದೂ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. (21) ರಿಂದ (2) ರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿರಲೇ ಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

ಅವಲಂಬನೆ ಮತ್ತು ನಿರವಲಂಬನೆಯ ಇನ್ನಿತರ ಸರಳ ಗುಣಗಳು ಸುಲಭವಾಗಿ ದೊರಕುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\{0\}$ ಎಂಬ ಗಣವು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $1 . 0 = 0$ ಮತ್ತು $1 \neq 0$. ಅಲ್ಲದೆ $X \neq 0$ ಇರಲು, ಆಗ $aX = 0$ ಮತ್ತು $a \neq 0$ ಆಗಿರುವುದು ನಮಗೆ $X = 0$ ಎಂದು ಹೇಳುವುದರಿಂದ $\{X\}$ ಗಣವು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣದ ಯಾವುದೇ ಉಪಗಣವು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿರಲೇಬೇಕೆಂಬುದನ್ನೂ, ಒಂದು ಅವಲಂಬಿತ ಗಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಗಣವು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿರಲೇಬೇಕೆಂಬುದನ್ನೂ, ಗಮನಿಸಿರಿ. ಆದರೆ ನಾವು ಅವಲಂಬಿತ ಗಣಗಳ ನಿರವಲಂಬಿತ ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, R^2ನಲ್ಲಿರುವ $\{1,0\}$ ಗಣವು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ $\{(1, 0), (2, 0)\}$ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $1 . (2 , 0) - 2 (1, 0) = 0$.

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು ಸದಿಶಗಳ ನಿರ್ದಿಷ್ಟಗಣಗಳಿಗಾಗಿ ಇವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಅನಂತ ಗಣಗಳಿಗೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. Dಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಂತ ಉಪಗಣವೂ ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಸದಿಶಗಳ ನಿರ್ದಿಷ್ಟಗಣ Dಯನ್ನು **ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ** ಎಂದೂ, Dಯ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಉಪಗಣವು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದು **ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ** ಎಂದೂ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ನಾವು R^3ನಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಸದಿಶಗಳ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ನೋಡೋಣ. $X^1 = (x_1, y_1, z_1)$ ಮತ್ತು $X^2 = (x_2, y_2, z_2)$ ಆಗಿರಲಿ. $\{X^1, X^2\}$ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $aX^1 + bX^2 = 0$ ಮತ್ತು $a \neq 0$, ಅಥವಾ $b \neq 0$. $a \neq 0$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $X^1 = (-b/a)X^2$; ಅಂದರೆ, $x_1 = (-b/a)\, x_2$, $y_1 = (-b/a)y_2$ ಮತ್ತು $z_1 = (-b/a)z_2$. ಹೀಗೆ X^1 ಯು $(0, 0, 0)$ ಮತ್ತು (x_2, y_2, z_2) ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದೆ. (ಈ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಪ್ರಸಕ್ತ ನಿಯತಾಂಕಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೀಗಿವೆ. $x = x_2 t$, $y = y_2 t$ ಮತ್ತು $z = z_2 t$.) ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ X^1 ಇದ್ದರೆ, ಆಗ ಯಾವುದೋ t_0ಗೆ, $x_1 = x_2 t_0$, $y_1 = y_2 t_0$ ಮತ್ತು $z_1 = z_2 t_0$. ಹೀಗೆ $X^1 = t_0 X^2$; ಅಂದರೆ, $X^1 - t_0 X^2 = 0$. $\{X^1, X^2\}$ ಒಂದು

ಅವಲಂಬಿತಗಣವೆಂದು ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಂದ ಕೇವಲ X^1 ಮತ್ತು X^2 ಗಳು $(0, 0, 0)$ ಒಡನೆ ಏಕರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, $\{X^1, X^2\}$ ಒಂದು ಅವಲಂಬಿತಗಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಕೇವಲ X^1 ಮತ್ತು X^2 ಗಳು $(0, 0, 0)$ ಒಡನೆ ಏಕರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $\{X^1, X^2\}$ ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ.

X^1 ಮತ್ತು X^2 ಗಳು ಎರಡು ಸದಿಶಗಳಾಗಿರಲಿ. X^1 ಮತ್ತು X^2 ಗಳ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯು X ಆಗಿರಲಿ; ಅಂದರೆ, $X = aX^1 + bX^2$, ಇಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು b ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ. ನಾವು ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. $X^1 = (1, 1, 0)$ ಮತ್ತು $X^2 = (0, 1, 1)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, $(1, 1, 0)$ ಮತ್ತು $(0, 1, 1)$ ಗಳು $(0, 0, 0)$ ಒಡನೆ ಏಕರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ $\{X^1, X^2\}$ ಗಣವು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. X^1, X^2 ಮತ್ತು $(0, 0, 0)$ ಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಿರುವ ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣವು $x - y + z = 0$ ಆಗಿದೆ. $X = aX^1 + bX^2 = a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) = (a, a+b, b)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ X ಈ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವುದನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ, $X = (x_0, y_0, z_0)$. ಇದು ಈ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ $x_0 - y_0 + z_0 = 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ $y_0 = x_0 + z_0$. ಇದು $X = x_0X^1 + z_0X^2$ ಎಂದು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. X^1, X^2 ಮತ್ತು $(0, 0, 0)$ ಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಿರುವ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ X ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, ಒಂದು ಸದಿಶ X, ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಬಿಂದುವು, X^1 ಮತ್ತು X^2 ಗಳ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿರುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

$X^1 = cX^2$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ; ಅಂದರೆ, X^1, X^2 ಮತ್ತು $(0,0,0)$ ಗಳು ಏಕರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವುದು. ಆಗ $X = aX^1 + bX^2 = (ac+b)X^2$. ಹೀಗೆ X, X^2 ಮತ್ತು $(0, 0, 0)$ ಗಳು ಏಕರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ $X = t_0X^2 = 0. X^1 + t_0X^2$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಕೇವಲ X^2 ಮತ್ತು $(0, 0, 0)$ ಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ X ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, X ಯು X^1 ಮತ್ತು X^2 ಗಳ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುವುದು. (ಇಲ್ಲಿ $X^2 \neq 0$ ಮತ್ತು $\{X^1, X^2\}$ ಒಂದು ಅವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದೆ).

ಈ ಟೀಕೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ದತ್ತ ಸದಿಶಗಳ ಗಣದ ಎಲ್ಲ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು ಸ್ವಾರಸ್ಯದ್ದಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರಬೇಕು. ಇದು ಒಂದು ಹೆಸರನ್ನು

ಹೊಂದಿದೆ. V ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಮತ್ತು Dಯು ಒಂದು ಅಶೂನ್ಯ ಉಪಗಣವಾಗಿರಲಿ. Dಯ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಉಪಗಣದ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಂತೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲ್ಪಡಬಹುದಾದ Vಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲ ಸದಿಶಗಳ ಒಂದು ಸಂಗ್ರಹವು M ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ M ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ, ಇದನ್ನು **D ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. D ಯು M ಅನ್ನು **ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತದೆ** ಎಂದೂ ಹೇಳಲಾಗುವುದು.

ಈಗ M ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ. X_0ಯು D ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $0.X_0 = 0$ ಮತ್ತು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಉಪಗಣದ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆ $0.X_0$ ಆಗಿದೆ. ಹೀಗೆ 0 ಯು M ನಲ್ಲಿದೆ. X ಮತ್ತು Y ಗಳು M ನಲ್ಲಿರಲಿ. ಆಗ ನಾವು $X^1, X^2, \ldots, X^k$ ಎಲ್ಲವುಗಳನ್ನೂ D ಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು $Y^1, Y^2, \ldots, Y^l$ ಇವೂ ಎಲ್ಲವೂ D ಯಲ್ಲಿ, $X = c_1X^1 + c_2X^2 + \cdots + c_kX^k$ ಮತ್ತು $Y = d_1Y^1 + d_2Y^2 + \cdots + d_1Y^l$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆಗ $aX = (c_1a)X^1 + (c_2a)X^2 + \cdots + (c_ka)X^k$ ಮತ್ತು $X + Y = c_1X^1 + c_2X^2 + \cdots + c_kX^k + d_1Y^1 + d_2Y^2 + \cdots + d^1y_1$ ಆಗುವುದರಿಂದ aX ಮತ್ತು $X + Y$ ಗಳೆರಡೂ D ಯ ಯಾವುದಾದರೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಉಪಗಣದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಗಳಾಗಿವೆ. ಹೀಗೆ aX ಮತ್ತು $X + Y$ ಗಳೆರಡೂ M ನಲ್ಲಿವೆ. ಈಗ (12) ರಿಂದ M ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಪುನಃ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೇಳಿಕೆ (17), X ಮತ್ತು Y ಗಳ ಯಾವುದೇ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯು, (2) ರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶವು X ಮತ್ತು Y ಗಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ (17) ಮತ್ತು (18) ಎರಡೂ ಸೇರಿ $\{X, Y\}$ ಯು, (2) ರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತವೆ. (19) ರಲ್ಲಿ $\{X, Y\}$ ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ನಿರ್ಮಿಸುವಿಕೆಯ ನಿರ್ಬಂಧಗಳು ನಮಗೆ $\{X, Y\}$ ಗಣವು (2) ರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ಸಾಕಾದಷ್ಟು ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಭರವಸೆ ಕೊಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ನಿರವಲಂಬನೆಯ ನಿರ್ಬಂಧಗಳು, ಬೇಕಾಗಿರುವುದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಭರವಸೆ **ಕೊಡುತ್ತದೆ.** ನಿರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಬೈಜಿಕ ಸ್ಥಿತಿಗಳು ಇವೇ ಆಗಿವೆ. $\{X, Y\}$ ಗಣವನ್ನು (2)ರ

ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು **ಆಧಾರ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ :

(24) **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ**: V ಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿ M ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ M ನ ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತವಾದ ಮತ್ತು M ಅನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವ ಒಂದು ಉಪಗಣ D ಯು M ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. D ಯು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ M ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮದ್ದಾಗಿದೆ ಎನ್ನಲಾಗುವುದು ಮತ್ತು D ಯಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು M ನ **ಆಯಾಮ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು '$dim\ M$' ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. M ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ನಾವು $dim\ M = 0$ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಟೀಕೆಗಳು : $\{(1, 0), (0, 1)\}$ ಗಣವು R^2 ದ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. ಇದು $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ಬದಲ, $\{(1, 0), (0, 1)\}$ ಗಣವು R^2 ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತದೆ. $x(1, 0) + y(0, 1) = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(x, y) = 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ $x = y = 0$; ಅಂದರೆ, $\{(1, 0), (0, 1)\}$ ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. $dim\ R^2 = 2$ ಎಂದು, ಅದು ಹಾಗಿರಬೇಕಾದ್ದರಿಂದ ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೆಯೇ $dim\ R^n = n$.

ಆಯಾಮದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವು ಸಂದಿಗ್ಧರಹಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇನ್ನೂ ತೋರಿಸಿಲ್ಲ. M ನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಆಧಾರಗಳು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು. ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಒಂದು ವಿಧಾನದೊಂದಿಗೆ ಇದನ್ನು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು.

M ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಆಗ M ಒಂದು ಅನಂತ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತದ ಮತ್ತು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದ ಹೆಚ್ಚು ಭಾಗ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಫೋರಿಯರ್ ಶ್ರೇಣಿಗಳು, ಅವಕಲನ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಕ್ವಾಂಟಂ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು ಅನಂತ ಆಯಾಮದ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಲ್ಲಿ ನೆರವೇರುತ್ತವೆ. ಇಷ್ಟಿದ್ದರೂ, ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಯನದ ಹೆಚ್ಚು ಭಾಗವನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮದ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಿಗೇ ಮಿತಿಗೊಳಿಸುತ್ತೇವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಅಂಥ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಜ್ಞಾನವು ಅನಂತ ಆಯಾಮದ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ.

ಆಧಾರದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಿಂದ ನೋಡೋಣ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು M ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಎರಡು ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತೇವೆ: $\{X^1, X^2, \ldots. X^k\}$ಯು M ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಗತಿಯು X ಯು M ನಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ $X = a_1X^1 + a_2X^2 + \cdots + a_kX^k$ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ X ಗೆ ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಎರಡನೆಯ ಸಂಗತಿಯು, ಅಂದರೆ, ನಿರವಲಂಬನೆಯು ಅಂತಹ ಕೇವಲ ಒಂದೇ ಒಂದು ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $X = b_1X^1 + b_2X^2 + \cdots + b_kX^k$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ವ್ಯವಕಲನದಿಂದ $0 = (a_1 - b_1) X^1 + (a_2 - b_2) X^2 + \cdots + (a_k - b_k) X^k$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯ ನಿರವಲಂಬನೆಯು ನಮಗೆ $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$, $a_k = b_k$ ಎಂದು ಹೇಳು ತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ M ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆಯು, M ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು X ಕೂಡ $X = a_1X^1 + a_2X^2 + \cdots + a_kX^k$ ರೂಪದಲ್ಲಿನ ಒಂದು **ಏಕೈಕ** ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಭಾಗ 4 ರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಭಾಗ 6 ರಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿ ಕಾರ್ಯರೂಪಕ್ಕೆ ತರಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಎರಡು ಪೂರ್ವಪಕ್ಷಗಳ ಸಹಾಯದ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಪೂರ್ವಪಕ್ಷವು ಪ್ರಮೇಯ 2ನ್ನು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣಗಳು ಅತಿ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರಲಾರ ವೆಂಬುದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ 1. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಗಣದಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯು, $(\{Y^1, Y^2. \ldots, Y^n\}$ ದಂತವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಒಂದು ಸದಿಶವು V ಆಗಿರಲಿ, $D = \{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು V ಯಲ್ಲಿನ ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $k \le n$.

ಸಾಧನೆ : ಈ ಪೂರ್ವಪಕ್ಷವು (21) ರ ಒಂದು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣವಾಗಿದೆ. (21) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಾಗ ನಾವು (20) ಒಂದು ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು **ಹೊಂದಿದೆ** ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆವು. ಇದನ್ನೇ ಖಚಿತವಾಗಿ **ಮಾಡಬೇಕಾಗಿರು**

ವುದು. $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಗಣವು V ಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದರಿಂದ, D ಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಸದಿಶವೂ $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿದೆ; ಎಂದರೆ,

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
X^1 &= c_{11}Y^1 + c_{21}Y^2 + \cdots + c_{n1}Y^n\\
X^2 &= c_{12}Y^2 + c_{22}Y^2 + \cdots + c_{n2}Y^n\\
&\vdots \quad \cdots\\
X^k &= c_{1k}Y^1 + c_{2k}Y^2 + \cdots + c_{nk}Y^n
\end{aligned}
$$

$k>n$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಪ್ರಮೇಯ (2) ರ ಅನುಮಿತದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹವು

$$
(26)\qquad
\begin{aligned}
c_{11}d_1 + c_{12}d_2 + \cdots + d_{1k}d_k &= 0\\
c_{21}d_1 + c_{22}d_2 + \cdots + c_{2k}d_k &= 0\\
&\vdots\\
c_{n1}d_1 + c_{n2}d_2 + \cdots + c_{nk}d_k &= 0
\end{aligned}
$$

ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ ಯು ಅಂತಹ ಒಂದು ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $d_1X^1 + d_2X^2 + \cdots + d_kX^k = d_1(c_{11}Y^1 + c_{21}Y^2 + \cdots + c_{1i}Y^n) + d_2(c_{12}Y^1 + c_{22}Y^2 + \cdots + c_{n2}Y^n) + \cdots + d_k(c_{1k}Y^1 + c_{2k}Y^2 + \cdots + c_{nk}Y^n) = (c_{11}d_1 + c_{12}d_2 + \cdots + c_{1k}d_k)Y^1 + (c_{21}d_1 + c_{22}d_2 + \cdots + c_{2k}d_k)Y^2 + \cdots + (c_{n1}d_1 + c_{n2}d_2 + \cdots + c_{nk}d_k)Y^n = 0.Y^1 + 0.Y^2 + \cdots + 0.Y^n = 0.$ ಹೀಗೆ $k>n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ನಾವು $d_1, d_2, \ldots, d_k$, ಗಳನ್ನು, ಎಲ್ಲವೂ ಸೊನ್ನೆಗಳಾಗಿಲ್ಲದಿರುವಂತೆ, $d_1X^1 + d_2X^2 + \cdots + d_kX^k = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು; ಅಂದರೆ, $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು ಒಂದು ಅವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದೆ. ನಾವು $k \le n$ Q. E. D. ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮುಂದಿನ ಪೂರ್ವಪಕ್ಷವು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣಗಳನ್ನು 'ವಿಸ್ತರಿಸುವ' ವಿಧಾನ ವೊಂದನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ 2. V ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತಗಣವು $\{X^1, X^2, \ldots, X^r\}$ ಆಗಿರಲಿ. $\{X^1, X^2, \ldots, X\}$ ನಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು

M ಆಗಿರಲಿ. V ಯಲ್ಲಿರುವ ಆದರೆ M ನಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶವು X ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $\{X^1, X^2, X^r, X\}$ ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ : $c_1X^1+c_2X^2+\cdots+c_rX^r+cX=0$ ಆಗಿರಲಿ. ನಾವು $c_1=c_2=\cdots=c_r=c=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. $c\neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, X ಅನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ. ಇದು

$$X=-\frac{c_1}{c}X^1-\frac{c_2}{c}X^2-\cdots-\frac{c_r}{c}X^r.$$ ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಈ ಉಕ್ತಿಯ ಬಲಭಾಗವು $\{X^1, X^2, \ldots, X^r\}$ ನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿದೆ; ಆದ್ದರಿಂದ M ನಲ್ಲಿದೆ. ಎಡಭಾಗವು M ನಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಇದು ಒಂದು ವಿರೋಧಾಭಾಸವಾಗಿದೆ. ನಾವು $c=0$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ $c_1X^1+c_2X^2+\cdots+c_rX^r=0$. $\{X^1, X^2, \ldots, X^r\}=0$ (X^1, X^2, X^r) ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $c_1=c_2=\cdots=c_r=0$ ಎಂಬುದಾಗಿರಬೇಕು. ಈಗಾಗಲೇ $c_1=c_2=\cdots=c_r=0$ ಎಂದು ನಾವು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ; ಅಂದರೆ, $\{X^1, X^2, \ldots, X^r, X\}$ ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದೆ. Q. E. D.

V ಯು ಸದಿಶಗಳ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗಣದಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎಂದು ಮುಂಚಿತವಾಗಿ ತಿಳಿದಿರುವಾಗಲೆಲ್ಲ, ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯ ಒಂದು ಉಪ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಆಧಾರವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಈ ಎರಡು ಪೂರ್ವ ಪಕ್ಷಗಳು ಕೊಡುತ್ತವೆ. $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಗಣವು V ಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಿ ಮತ್ತು M ಯು V ಯ ಅಶೂನ್ಯ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ ಆಗಿರಲಿ. M ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಅಶೂನ್ಯ ಸದಿಶವು X ಆಗಿರಲಿ. $\{X\}$ ಇದು M ಅನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದರೆ, ಆಗ $\{X\}$ ಒಂದು ತಳಹದಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $X^1=X$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\{X^1\}$ ನಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿಲ್ಲದಿರುವ M ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶವು X^2 ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ 2 ರಿಂದ, $\{X^1, X^2\}$ ಯು M ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದೆ. $\{X^1, X^2\}$ ಯು M ನಿರ್ಮಿಸಿದರೆ, ಆಗ ಅದು M ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $\{X^1, X^2\}$ ನಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ X^3 ಇಲ್ಲದಿರುವಂತೆ, X^3 ಅನ್ನು M ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಕಡೆಯಲ್ಲಿ M ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದು, ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ? n ನಿರವಲಂಬಿತ ಸದಿಶಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂಬ

ಭರವಸೆಯನ್ನು ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ 1 ಕೊಡುತ್ತದೆ ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ; M ಅನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸದಿರುವ $\{X^1, X^2, \ldots, X^r\}$ ಯು M ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ನಿರವಲಂಬನೆಯನ್ನು ಹಾಳು ಮಾಡದಂತೆ, ಹೆಚ್ಚಿಸಬಹುದೆಂಬ ಭರವಸೆಯನ್ನು ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ 2 ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಂತಿಮವಾಗಿ Mಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 5. ಸದಿಶಗಳ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗಣದಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯು V ಮತ್ತು V ಯ ಒಂದು ಅಶೂನ್ಯ ಉಪ ಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಕೂಡಿರುವ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು M ಹೊಂದಿದೆ; ಅಂದರೆ, Mಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿದೆ. ಇಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ, Mನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಆಧಾರಗಳು ಅಷ್ಟೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ. ಈಗ ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಕೊನೆಯ ಹೇಳಿಕೆಯೊಂದನ್ನುಳಿದು ಉಳಿದುದನ್ನೆಲ್ಲ ಸ್ಥಾಪಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ 1ರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿದೆ. D_1 ಮತ್ತು D_2 ಗಳೆರಡೂ Mಗೆ ಆಧಾರಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ D_1 ನಲ್ಲಿನ ಸದಿಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು, V ಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರುವ ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿಲ್ಲವೆಂದು, ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ 1 ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ D_1 ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗಣವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆಯೇ D_2 ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗಣವಾಗಿದೆ. D_1, M ಅನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು D_2 ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ D_2 ನಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು, D_1 ನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಲ್ಲ. M ಅನ್ನು D_2 ನಿರ್ಮಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು D_1 ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, D_1ನಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು D_2ನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಲ್ಲ. ನಾವು D_1 ಮತ್ತು D_2 ಗಳು ಅಷ್ಟೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಪ್ರಮೇಯ 5 ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ. Q.E.D.

ಟೀಕೆಗಳು : R_n ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ನಾವು ಕೊಂಚ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವಾದ ಸಂಗತಿಯಾದ, R ನ ಯಾವುದೇ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯೂ ಕೂಡ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರುವುದೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ R^nನ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು (ಅಥವಾ ಯಾವುದಾದರೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮದ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು), ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ

ವಿವರಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಅನೇಕ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಅದು ಹೇಗಾದರೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲ್ಪಟ್ಟಿರಲಿ ಆ ಆಧಾರದಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಆಧಾರದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭರವಸೆಯನ್ನು (ಪ್ರಮೇಯ 5) ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 5 ರ ಕೆಲವು ಸುಲಭ ಪರಿಣಾಮಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ :

(27) V ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮದ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. Vಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು U ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $dim\ U \leq dim\ V$. U, Vಗೆ ಒಂದು ಯುಕ್ತ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $dim\ U < dim\ V$.

(28) D ಯು n ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು Vಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದರೆ, ಆಗ $dim \leq n$. $dim\ V = n$ ಆಗಿರಲು, ಆಗ D ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದೆ.

(29) D ಯು n ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $dim\ V \geq n$. $dim\ V = n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, D ಯು V ಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತದೆ.

(27), (28) ಮತ್ತು (29) ರ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ. (28) ಮತ್ತು (29) ರ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಅನ್ವಯಗಳಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $dim\ V = n$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು D ಯು n ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ D ಯು ಒಂದು ತಳಹದಿ ಹೌದೇ ಅಲ್ಲವೇ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ, D ಯು V ಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು (28) ಅಥವಾ D ಯು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದು (29) ತೋರಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. (1) ರಲ್ಲಿ, ಪರಿಹಾರಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯು ಆಯಾಮ 2ನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ, ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ, (3) ನಮಗೆ (1) ರ ಎಲ್ಲ ಸಮೀಕರಣಗಳು, (4) ರ ಮೇಲೆ 'ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತವೆ' ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತವೆ. ಹಾಗೆಯೇ (5) ರ ಪರಿಹಾರಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯು ಆಯಾಮ 1 ನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ; ಅಂದರೆ, ಅದು $Z = 1$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ, (6) ರಿಂದ ಸಿಗುವ ಸದಿಶ $(-\frac{3}{8}, \frac{1}{8}, 1)$ ಇದರಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ. (5) ರ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳು,

(6) ರ ಎರಡು ನಿರವಲಂಬಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೇಲೆ 'ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತವೆ.' (7) ರಲ್ಲಿ, ಪರಿಹಾರಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯು 0 ಆಯಾಮ ಹೊಂದಿದೆ, ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳೂ 'ನಿರವಲಂಬಿತ'ವಾಗಿವೆ. ಈ ಸಂಬಂಧಗಳು (ಅಂದರೆ, ಸಮೀಕರಣಗಳ 'ಅವಲಂಬನೆ' ಅಥವಾ 'ನಿರವಲಂಬನೆ' ಮತ್ತು ಚರಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಫಲವಾಗುವ ಸಂಬಂಧಗಳು, 'ನಿರವಲಂಬಿತ' ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಪರಿಹಾರಗಳ ಸಮಷ್ಟಿ) ಸುಲಭವಾಗಿ ಈಗ ಲಭ್ಯವಿರುವ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳಿಂದ ಸ್ಥಾಪಿಸಲ್ಪಡಬಹುದು.

ಮಾತೃಕೆ (2) ರ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು, R^3 ನಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳಂತೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಯೋಚಿಸಬಹುದು: ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಸದಿಶ $(-2, 1, 3)$ ರಂತೆ, ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು $(2, -1, -3)$ ಸದಿಶದಂತೆ, ಮೂರನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು $(-6, 3, 9)$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. ಈ ಮೂರು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ M ಆಗಿರಲಿ. ಈ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\}$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲಾಗುವುದು. $(1, -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}) = -\frac{1}{2}$ $(-2, 1, 3)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ M ಗೆ $(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ ಸೇರಿರುವುದನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಅದೂ ಅಲ್ಲದೆ $(-2, 1,3) = -2\ (1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$; $(2, -1, -3) = 2\ (1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2},)$; ಮತ್ತು $(-6, 3, 9) = -6\ (1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ ಇದೆ. ಹೀಗೆ $(-2, 1, 3)$, $(2, -1, -3)$ ಮತ್ತು $(-6, 3, 9)$ ಗಳ ರೇಖೀಯ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶವು, $(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ ಯು ರೇಖೀಯ ಸಂಯೋಜನೆಯೂ ಆಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ

(30) (4) ರ ಅಶೂನ್ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು, ಅಂದರೆ, $\{(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})\}$ ಯು M ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ.

(31) ಅಲ್ಲದೆ, $dim\ R^3 = 3 = dim\ M +$ (2)ರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಆಯಾಮ.

ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಡುವ R^3 ನ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು M_1 ಆಗಿರಲಿ.

(32)
$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

ಇದು (5) ರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. ನಾವು (32) ನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಸಂಕುಚನೆ ಮಾಡಬಹುದು.

$$(33)\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ಇದು (6) ರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. (33) ರ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಡುವ R^3 ನ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ N ಆಗಿರಲಿ. $M_1 = N$ ಎಂದು ಮತ್ತು $\{(1, 0, \frac{7}{9}), (0, 1, -\frac{1}{9})\}$ ಯು M_1 ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲಾಗುವುದು. (32) ಕ್ಕೆ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳ ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ (32) ರಿಂದ ಮಾತೃಕೆ (33) ನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ. ಅಂಥ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮವೂ ವಾಸ್ತವವಾಗಿ (32) ರ ಒಂದು ಅಡ್ಡ ಸಾಲನ್ನು, (32) ರ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಿಂದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ (33) ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಡ್ಡ ಸಾಲೂ (32) ರ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆ ಆಗಿದೆ. ನಾವು M_1 ನಲ್ಲಿ N ಇದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈಗ (33) ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಡ್ಡ ಸಾಲೂ, (32)ರ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ತೋರಿಸಬಹುದು ಅಥವಾ (33) ಕ್ಕೆ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳ ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ, (33) ರಿಂದ (32) ನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದೆಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದೆಂದು ನೋಡೋಣ. (32) ರಿಂದ (33) ನ್ನು ದೊರಕಿಸಲು, ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು, (32) ಕ್ಕೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸಿರಿ. ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲನ್ನು -2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದದ್ದನ್ನು ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅನಂತರ -3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದದ್ದನ್ನು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲನ್ನು $\frac{1}{9}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ. ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಮತ್ತು ಬಂದದ್ದನ್ನು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿರಿ. (33) ರಿಂದ (32) ನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕಾದರೆ ಕೇವಲ ಈ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಹಿಂದು ಮುಂದು ಮಾಡಿದರೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಪ್ರಭಾವಗಳನ್ನು ರದ್ದುಗೊಳಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. (33)ಕ್ಕೆ ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿರಿ. ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲನ್ನು 9 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದದ್ದನ್ನು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಅನಂತರ -2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದದ್ದನ್ನು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲನ್ನು 9 ರಿಂದ

ಗುಣಿಸಿ ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಮತ್ತು ಬಂದದ್ದನ್ನು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಅನಂತರ 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಮತ್ತು ಬಂದದ್ದನ್ನು ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ (32) ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. (ಓದುಗರು ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು.) ಹೀಗೆ (32) ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲೂ, (33) ರ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು M_1 ಯು N ನಲ್ಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $M_1 = N$. (33) ರ ಅಶೂನ್ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿವೆ; ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ.

(34) (33) ಸೋಪಾನ ವ್ಯೂಹರೂಪದ ಅಶೂನ್ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು M_1 ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿವೆ.

ಅಲ್ಲದೆ,

(35) $\dim R^3 = 3 = \dim M_1 +$ (32) ರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಆಯಾಮ.

ಈಗ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುವುದು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. ಒಂದು $m \times n$ ಮಾತೃಕೆ A ಯ **ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯು** A ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ R^n ನ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ. ಈ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಆಯಾಮವು A ಯ **ಸ್ಥಾನ** ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು 'ಸ್ಥಾನ (A)'ಯಿಂದ ಇದನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. A ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಆಯಾಮವನ್ನು A ಯ **ಶೂನ್ಯತೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು 'ಶೂನ್ಯತೆ (A)' ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಲಾಗುವುದು. A ಯು ಒಂದು $m \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು A ಗೆ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ, A ಯಿಂದ B ಯು ದೊರೆಯಲಿ. ಹೀಗೆ A ಯ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು, A ಯ ಕೆಲವು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಿಂದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸುವುದರಿಂದ B ಯು A ಯಿಂದ ದೊರೆತರೆ B ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯು A ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುವುದು. ಅವರೆ B ಗೆ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ B ಯಿಂದ A ಯನ್ನು ದೊರಕಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. (ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $i_0 \neq i_1$ ಎಂದಿರುವಾಗ, A ಯ i_1 ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿ A ಯಿಂದ B ಯನ್ನು ದೊರಕಿಸಬಹುದಾದರೆ, ಆಗ B ಯ i_0 ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು $-a$ ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಮತ್ತು B ಯ i_1

ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ B ಯಿಂದ A ದೊರಕಿಸಬಹುದು). A ಯ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯು B ಯ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ A ಮತ್ತು B ಗಳು ಒಂದೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ (32) ಮತ್ತು (33) ರ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವಿಧಾನದ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

(36) A ಯು ಒಂದು $m \times n$ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು A ಯು, ಸಂಕುಚಿಸಿದ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳ ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆ R ಗೆ ಸಂಕುಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ A ಮತ್ತು R ಗಳು ಒಂದೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮುಖ ಪ್ರಮೇಯವು ಇದರ ಪರಿಣಾಮವೇ ಆಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 6. A ಯು $m \times n$ ದ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಸ್ಥಾನ (A) + ಶೂನ್ಯತೆ $(A) = n$.

ಸಾಧನೆ. A ಯ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಮತ್ತು A ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ನಾವು ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೇವಲ ರೇಖಿಸೋಣ. ಮೊದಲು, ಒಂದು ಸಂಕುಚಿಸಿದ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳ ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆ R ಗೆ, A ಯನ್ನು ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಸಂಕುಚನೆ ಮಾಡಿರಿ. ಅನಂತರ (36) ರಿಂದ, A ಮತ್ತು R ಗಳು ಒಂದೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದೂ ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 1 ರಿಂದ ಅವು ಒಂದೇ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದೂ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. R ನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಈ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ವಿವರಿಸಬಹುದು. ಭಾಗ 1 ರ (35) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ, R ವಿವರಿಸಲ್ಪಡಲಿ; ಅಂದರೆ, R ನ ಅಶೂನ್ಯ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು r ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು R ನ i ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲ ಅಶೂನ್ಯ ದಾಖಲಾತಿಯು, ನೀಟಸಾಲಿನ ಅಡಿಬರಹವು k_i ಆಗಿರಲಿ, $1 \leq i \leq r$ ಆಗಿರಲಿ.

(37) R ನ ಅಶೂನ್ಯ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳು, R ನ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.

ಹೀಗೆ ಸ್ಥಾನ (A) = ಸ್ಥಾನ $(R) = r$, $r = n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

ಪ್ರಮೇಯ 2 ರಿಂದ, ಶೂನ್ಯತೆ $(A) = 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ $n =$ ಸ್ಥಾನ $(A) +$ ಶೂನ್ಯತೆ (A). $r < n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}$ ಗಳು, ಪ್ರಮೇಯ 2ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ $\{x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kr}\}$ ಗಳಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಳ್ಳದ ಚರಾಂಕಗಳಾಗಿರಲಿ. $t \neq s$ ಆಗಿರುವಾಗ u_s ಗೆ 1 ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು u_t ಗೆ ಸೊನ್ನೆಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು, ದೊರಕಿಸಿಕೊಂಡ ಸದಿಶ X^s ಆಗಿರಲಿ. ಭಾಗ 1 ರ (38) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ X^s ನ ಇತರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

(38) $\{X^1, X^2, \ldots, X^{n-r}\}$ ಗಣವು A ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ.

ಹೀಗೆ ಶೂನ್ಯತೆ $A = n - r = n -$ ಸ್ಥಾನ (A). Q.E.D.

ಟೀಕೆಗಳು. ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯು ಇದರಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆಯು ಒಂದಿಷ್ಟು ಕ್ಲಿಷ್ಟತೆಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಬಹುದಾದರೂ, ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ ವೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರಬೇಕು. A ಯು $m \times n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ A ಯ ಅತಿಸಮೃದ್ಧಿ ಆಗಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕುವುದರಿಂದ ಅಂದರೆ A ಯನ್ನು ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ರೂಪಕ್ಕೆ ಸಂಕುಚಿಸುವುದರಿಂದ, A ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ನಾವು ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ದೊರಕಿಸಬಹುದು. ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ A ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ 'ನಿರವಲಂಬಿತ' ಆಯ್ಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲೂ ಶಕ್ತರಾಗುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ಭಾಗ 1 ರಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಕೆಲಸದ ಗುರಿಯೂ ಸಹ ಇದೇ ಆಗಿತ್ತು. (38)ರಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು X^iಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ 'ನಿರ್ಬಾಧಿತ' ಚರಾಂಕ u_i ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗುತ್ತದೆ. (38) ರಿಂದ ಒಟ್ಟಾರೆ ಹೇಳುವುದು ಏನೆಂದರೆ A ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ X ಇರಲು $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}$ ಗಳಿಗೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ಮಾತ್ರ A ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ X ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು, (37) ಮತ್ತು (38) ರ ಸಂಪೂರ್ಣ ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು R^3ನಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸೋಣ. $(0, 0, 0)$ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೆ ಅಥವಾ ಒಂದು ಸಮತಲವು M ಆಗಿರಲಿ. M ವಿವರಿಸಲು ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. M ಅನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವ ಸದಿಶಗಳ ಒಂದು ಗಣವನ್ನು ಅಥವಾ M ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರುವಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ಗಣವನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. ಎಲ್ಲ ಅತಿಸಮೃದ್ಧ ಸಮೀಕರಣ

ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿದರೆ, ಆಗ ನಾವು M ನ ಒಂದು ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೆಯೇ ನಾವು ನಿರ್ಮಿಸುವ ಗಣವು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ಇಚ್ಛಿಸಿದರೆ, M ನ ಒಂದು 'ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ' ವಿವರಣೆಯನ್ನು ದೊರಕಿಸುತ್ತೇವೆ. M ನ ಆಯಾಮ $+M$ ಅನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಸವಿಾಕರಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಮೂರು R^3ನ ಆಯಾಮ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಪ್ರಮೇಯ 6 ನಮಗೆ ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ M ಒಂದು ರೇಖೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ನಾವು M **ಒಂದು** ಸದಿಶದಿಂದ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಆಧಾರದಿಂದ ಅಥವಾ **ಎರಡು** ಸಮತಲಗಳ ಛೇದನೆಯೆಂದು ವಿವರಿಸ ಬಹುದು. M ಒಂದು ಸಮತಲವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ M ನ ಒಂದು ಆಧಾರವು **ಎರಡು** ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 6, (37) ಮತ್ತು (38) ರೊಡನೆ ಬೆರೆತು ಅನೇಕ ಅನ್ವಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ನಾವು ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. $\{X^1, X^2, \dots, X^k\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ R^nನ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ M ನ ಆಯಾಮವೇನು? ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ 1 ರಿಂದ, $\dim M \leq k$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. A ಯು $k \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ, ಇದರ i ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು X^iನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿಂದ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $i = 1, 2, \dots, k$, ಆಗ A ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಸ್ಥಾನ $(A) = \dim M$.

M ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು? ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರಿಸಲು (37) ಅನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು. A ಯನ್ನು ಒಂದು ಸೋಪಾನ ವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆ Rಗೆ ಸಂಕುಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ Rನ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು A ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯಾದ M ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿವೆ.

ಇದೇ ತಂತ್ರವನ್ನು ಇನ್ನೆರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸ ಬಹುದು. R^nನಲ್ಲಿ X ಇರಲಿ ಮತ್ತು R^nನಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳ ಒಂದು ಗಣವು $\{X^1, X^2, \dots, X^k\}$ ಆಗಿರಲಿ. $\{X^1, X^2, \dots, X^k\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬಿತ ವಾಗಿದೆಯೇ? $\{X^1, X^2, \dots, X^k\}$ ಯ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯು X ಆಗಿದೆಯೇ? ಮೊದಲನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು, $\{X^1, X^2, \dots, X^k\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಕೇವಲ $\{X^1, X^2, \dots, X^k\}$ ಯು ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, $\dim M = K$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. [(28) ಅನ್ನು, $V = M$ ಜತೆಗೆ ಮತ್ತು $D = \{X^1, X^2, \dots, X^k\}$ ಜತೆಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ]. ಮೇಲೆ ರಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತೃಕೆಯು A ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$dim\ M$ = ಸ್ಥಾನ (A) ಹೀಗೆ $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು, ನಾವು $X^1, X^2, \ldots, X^k$ *n-tuple* ಗಳು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳಾಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಒಂದು ಸೋಪಾನ ವ್ಯೂಹ ರೂಪ R ಗೆ ಸಂಕುಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ ಕೇವಲ ಸ್ಥಾನ $(R) = K$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಗಣವು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು, $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಇಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\{X^1, X^2, \ldots, X^k X\}$ ನಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು M_1 ಆಗಿರಲಿ; ಆಗ M_1 ನ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗುವುದರಿಂದ, $dim\ M \le dim\ M_1$, [(27) ರಿಂದ]. M ನಲ್ಲಿ X ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳುವುದೂ ಒಂದೇ, $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯ ರೇಖೀಯ ಸಂಯೋಜನೆಯು X ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುವುದೂ ಒಂದೇ. ಆದರೆ M ನಲ್ಲಿ X ಇದ್ದರೆ, ಆಗ M_1 ನಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶವು M ನಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವುದು. ಕೇವಲ $M = M_1$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯು X ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೆ (27) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ, ಇದೂ ಮತ್ತು $dim\ M = dim\ M_1$ ಎಂದು ಹೇಳುವುದೂ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಈಗ ನಾವು ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. X^i ಯು i ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಾಗಿರುವ $k \times n$ ಮಾತೃಕೆಯು A ಆಗಿರಲಿ. $i = 1, 2, \ldots, k$, ಆಗಿದ್ದರೆ X^iಯು i ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಾಗಿರುವ ಮತ್ತು X ಯು $(k+1)$ ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಾಗಿರುವ, $(k+1) \times n$ ಮಾತೃಕೆಯು B ಆಗಿರಲಿ. ಸ್ಥಾನ (A) = ಸ್ಥಾನ (B) ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಇದರ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯು X ಆಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $dim\ M$ = ಸ್ಥಾನ (A) ಮತ್ತು $dim\ M_1$ = ಸ್ಥಾನ (B). ಆಗ, ಹೀಗೆ A ಮತ್ತು B ಗಳನ್ನು ಸಂಕುಚಿಸುವುದರಿಂದ ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಬಹುದು.

ಅಂತೂ $X = a_1X^1 + a_2X^2 + \cdots + a_kX^k$ ಆಗಿರುವಂತೆ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ಮೇಲೆ ಪಟ್ಟ ಶ್ರಮಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಶ್ರಮಪಡಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯು ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತದೆ. $X^1 = (3, 1, 2)$, $X^2 = (1, -6, 0)$ ಮತ್ತು $X = (1, \frac{20}{3}, \frac{4}{3})$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $X = aX^1 + bX^2$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, a ಮತ್ತು b ಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಇಚ್ಛಿಸಲಾಗುವುದು. ಇದು ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ,

$$3a + b = 1, \qquad a - 6b = \tfrac{20}{3}, \qquad 2a = \tfrac{4}{3},$$

ಇದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $a = \frac{3}{2}$, $b = -1$ ಎಂದು ಪಡೆಯಬಹುದು.

A ಯು ಒಂದು $m \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಒಂದು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ A ಯ ಒಂದು ನೀಟಸಾಲನ್ನು R^mನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶದೊಂದಿಗೆ ಸಮೀಕರಿಸಬಹುದು. A ಯ **ನೀಟಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯು** ಆಗ, A ಯ ನೀಟಸಾಲುಗಳಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ R^m ನ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು A ಯ **ನೀಟಸಾಲಿನ ಸ್ಥಾನವು** ಈ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಆಯಾಮವಾಗಿದೆ. ಮುಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾನ (A) = A ಯ ನೀಟಸಾಲಿನ ಸ್ಥಾನ ಎಂಬ ಕೊಂಚ ಆಶ್ಚರ್ಯಕರವಾದ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪರಿಣಾಮವು ಪ್ರಮೇಯ 6ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ.

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ಸಮಘಾತ ವ್ಯೂಹದ ಪರಿಹಾರಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಒಂದು ಅಸಮಘಾತ ವ್ಯೂಹದ ಬಗೆ ಏನು? ಈ ಪ್ರಸಂಗವನ್ನು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಡನೆ ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ; ಅನಂತರ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ,

$$(39) \qquad \begin{aligned} 2x + y - 3z &= 1 \\ 3x + 2y - 2z &= 2 \\ x + y + z &= 1. \end{aligned}$$

(39) ರ ವೃದ್ಧಿಸಿದ ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕುಚನೆಯಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ,

$$(40) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ಪ್ರಮೇಯ 3 ರಿಂದ (39)ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಒಂದು ಪರಿಹಾರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂದರೆ $(4, -4, 1)$ ಮತ್ತು $(0, 1, 0)$ ಹೀಗೆ (39)ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರಗಳಾಗಿವೆ. ಆದರೆ ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ $(4, -4, 1) + (0, 1, 0) = (4, -3, 1)$ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿಲ್ಲ; ಪರಿಹಾರಗಳು ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಪರಿಹಾರಗಳು ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ರೂಪಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಈ ರೇಖೆಯು $(0, 0, 0)$ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಹೇಗಾದರೂ $(4, -4, 1)-(0, 1, 0) = (4, -5, 1)$ ಇದರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಕೆಳಗಿನ ಸಮಘಾತ ವ್ಯೂಹಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ,

$$
(41) \qquad \begin{aligned} 2x + \ y - 3z &= 0 \\ 3x + 2y - 2z &= 0 \\ x + \ y + \ z &= 0. \end{aligned}
$$

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, (41)ಕ್ಕೆ $(8, -10, 2)$, ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು $(4, -4, 1)$ ಮತ್ತು $(0, 1, 0)$ಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ $(12, -14, 3)$ ಮತ್ತು $(8, -9, 2)$ ಬರುತ್ತದೆ ಇವೆರಡೂ (39)ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರಗಳಾಗಿವೆ. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ, (39)ಕ್ಕೆ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು (41)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ (39)ರ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ ಮತ್ತು (41)ರ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತವು (39)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಫಲಿತಾಂಶವು ಕೆಳಗಿದೆ. ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹಕ್ಕೆ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳು

$$
(42) \qquad \begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= y_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x^n &= y_m \end{aligned}
$$

ಕೆಳಗಿನ ಸಮಘಾತ ವ್ಯೂಹಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶದಿಂದ ಭಿನ್ನವಾಗಿವೆ.

$$
(43) \qquad \begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= 0 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}
$$

ಅದೂ ಅಲ್ಲದೆ (42) ರ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ ಮತ್ತು (43) ರ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತವೂ (42)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ (42) ಅನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದು ಭಾಗ 2 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ವಿಧಾನದಷ್ಟು ಶೀಘ್ರತರವಲ್ಲವಾದರೂ, ಇತರ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣವಾಗುತ್ತದೆ. (42)ನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು, ಮೊದಲು (42)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವನ್ನೂ, (43)ಕ್ಕೆ ಎಲ್ಲ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಆಗ (42) ರ ಜೊತೆ

ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವನ್ನು (42) ರ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪರಿಹಾರವನ್ನು (43) ರ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಪರಿಹಾರಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. (ಇದು ಒಂದು ಅಸಮಘಾತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಅವಕಲನ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಮೂಲ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲೊಂದಾಗಿದೆ, ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು, ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಸಮಘಾತ ವ್ಯೂಹದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪರಿಹಾರಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.)

ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ, V ಯು ಒಂದು ಉಪಸಮುಷ್ಟಿಯು U ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶವು X ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಎಲ್ಲ ಸದಿಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹ $X + Y$. ಇದನ್ನು X ಸದಿಶದಿಂದಾದ U ವಿನ **ಸಮಾಂತರ ರೂಪಾಂತರ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ Y ಯು U ನಲ್ಲಿದೆ. [ಹೀಗೆ $(0, 0, 0)$ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗದಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೆ ಅಥವಾ ಸಮತಲವು, $(0, 0, 0)$ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ರೇಖೆ ಅಥವಾ ಸಮತಲದ ಸಮಾಂತರ ರೂಪಾಂತರವಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಸದಿಶ X ನಿಂದ ಒಂದು ಉಪಸಮುಷ್ಟಿ U ನ ಸಮಾಂತರ ರೂಪಾಂತರವಾದ V ಯು ಒಂದು ಉಪಗಣ K ಯನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಒಂದು **ಸಂಬಂಧಿತ** ಉಪಸಮುಷ್ಟಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಪದವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. (42)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶದಿಂದ (43) ರ ಪರಿಹಾರಗಳ ಸಮಾಂತರ ರೂಪಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಿತ ಉಪಸಮುಷ್ಟಿಯನ್ನು (42) ರ ಪರಿಹಾರಗಳು ರೂಪಿಸುತ್ತವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. V ಯು ಬಾಣಗಳ ಸಮುಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ. (ಜಾಗರೂಕತೆ ಇರಿಸಿದ ಸ್ಪಷ್ಟ ಚಿತ್ರ ಇಲ್ಲಿ ಸಹಾಯಕ)

   (a) $(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$.

   (b) $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ ಗೆ $\overrightarrow{PQ}$ ಸದಿಶವು ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ ನಷ್ಟೇ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ (ಚಿತ್ರ 8 ನೋಡಿರಿ).

   (c) $(0, 0, 0)$ ಬಿಂದುವು O, (x, y, z) ಬಿಂದುವು P ಮತ್ತು (x, y, z) ಬಿಂದುವು Q ಆಗಿರಲಿ. $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ ನ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವು $(x + x_1, y + y_1, z + z_1)$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(d) $(0, 0, 0)$ ಬಿಂದುವು O ಮತ್ತು (x, y, z) ಬಿಂದುವು P ಆಗಿರಲಿ. aOP ಯ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವು (ax, ay, az) ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

2. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ಸಮಷ್ಟಿಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ಅನೇಕ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಉದ್ಧರಿಸಲಾಗುವುದು.

(a) V ಯು $\leq n$ ಸ್ತರದ ಬಹುಪದಿಗಳ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. $f = a_0t + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $g + b_0 + b_1t + b_2t_2 + \cdots + b_nt^n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f + g$ ಯನ್ನು $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n)t$ ಎಂದು ವಿವರಿಸಲಾಗುವುದು; af ಅನ್ನು $(aa_0) + (aa_1)t + \cdots + (aa_n)t^n$ ಎಂದು ವಿವರಿಸಲಾಗುವುದು.

(b) V ಯು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿರಲಿ.

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } \qquad A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \text{ ಆಗಿದ್ದರೆ,}$$

ಆಗ $A_0 + A_1$ ಮತ್ತು aA_0ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವಿವರಿಸಬಹುದು,

$$\begin{bmatrix} a_0 + a_1, & b_0 + b_1 \\ c_0 + c_1, & d_0 + d_1 \end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } \begin{bmatrix} aa_0 & ab_0 \\ ac_0 & ad_0 \end{bmatrix}.$$

(c) V ಯು $(ax + by + cz)$ ಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ a, b ಮತ್ತು c ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿವೆ. $(ax + by + cz) + (a_1x + b_1y + c_1z) = (a + a_1)x + (b + b_1)y + (c + c_1)z$ ನಿಂದ ಮೊತ್ತಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗುವುದು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು $d(ax + by + cz) = (da)x + (db)y + (dc)z$ ನಿಂದ ವಿವರಿಸಲಾಗುಲಾಗುತ್ತದೆ.

(d) Vಯು $ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz$ ಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. ಮೊತ್ತಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಾದ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ,

$(ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz) + (a_1x^2 + b_1y^2 +$

$c_1z^2 + d_1x + e_1y + f_1z) = (a+a_1)x^2 + (b+b_1)y^2 + (c+c_1)z^2 + (d+d_1)x + (e+e_1)y + (f+f_1)z;$
ಮತ್ತು

$$g(ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz) = (ga)x^2 + (gb)y^2 + (gc)z^2 + (gd)x + (ge)y + (gf)z.$$

(e) Vಯು ಒಂದು ದತ್ತರೇಖೆ l_0ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ರೇಖೆಗಳ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿರಲಿ. (0, 0, 0) ಮೂಲಕ l_0 ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆಂದು ಗ್ರಹಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು O ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. l_0ಗೆ l ಮತ್ತು l_2ಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ, Oಗೆ ಅತಿ ಸಮೀಪವಾಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು l_1 ಮತ್ತು l_2ಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ P_1 ಮತ್ತು P_2 ಆಗಿರಲಿ. $P = P_1 + P_2$ ಆಗಿರಲಿ. (ಇಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳ ಕೂಡುವಿಕೆಯನ್ನು R^3ನಲ್ಲಿರುವಂತೆ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.) l_0ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ, P ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಯು l ಆಗಿರಲಿ. ನಾವು l ಅನ್ನು l_1 ಮತ್ತು l_2ಗಳ ಮೊತ್ತವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $l = l_1 + l_2$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. l_1ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು a ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ al_1 ಅನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

3. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ ಅಲ್ಲ ಎಂದು, ಅಂದರೆ, (10)ರ ನಿಯಮಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದರೂ ಭಂಗಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(a) $x \geq y$ ಆಗಿರುವಂತೆ (x, y) ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಯ ಗಣ V ಆಗಿದೆ. ಮೊತ್ತಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಹೀಗೆ ವಿವರಿಸಲಾಗುವುದು. $(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$ ಮತ್ತು $a(x, y) = (|a|x, |a|y)$.

(b) Vಯು (x, y) ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಯ ಗಣವಾಗಿದೆ. R^2ನಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಮೊತ್ತಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಾದ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು $a(x, y) = (ax, y)$ ಯಿಂದ ವಿವರಿಸಲಾಗುವುದು.

(c) ಸ್ತರ ≤ 1 ಬಹುಪದಿಗಳ ಗಣ V ಆಗಿದೆ. $f = a_0 + a_1t$ ಮತ್ತು

$g=b_0+b_1t$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f+g=(a_0+b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)t$ ಮತ್ತು $af=(aa_0)+(aa_1)t$ ಎಂದು ವಿವರಿಸ ಲಾಗುವುದು.

4. ಕೆಳಗಿರುವ M ಉಪಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಸೂಚಿತ ಸಮಷ್ಟಿ Vಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(a) $V=R^2$, $x=y$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ ಜೋಡಿಗಳ (x, y) ಸಂಗ್ರಹ M ಆಗಿದೆ.

(b) $V=R^2$, $x=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ, ಎಲ್ಲ ಜೋಡಿಗಳ (x, y) ಸಂಗ್ರಹ M ಆಗಿದೆ.

(c) $V=R^3$, $x=z$ ಆಗಿರುವಂತೆ, ಎಲ್ಲ ತ್ರಿವಳಿಗಳ (x, y, z) ಸಂಗ್ರಹ M ಆಗಿದೆ.

(d) $V=R^3$, $x-2y+3z=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ ತ್ರಿವಳಿಗಳ (x, y, z) ಸಂಗ್ರಹ M ಆಗಿದೆ.

(e) $V=R^3$, $x=y$ ಮತ್ತು $z=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ ತ್ರಿವಳಿಗಳ (x, y, z) ಸಂಗ್ರಹ M ಆಗಿದೆ.

(f) $V=R^4$, $x-y=z+w$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ ಚತುರ್ವಳಿಗಳ (x, y, z, w) ಸಂಗ್ರಹ M ಆಗಿದೆ.

(g) Vಯು ಅಭ್ಯಾಸ $2(a)$ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದ್ದು $n=2$ ಹೊಂದಿದೆ. ಇದರೊಂದಿಗೆ, $a_0=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ, ಎಲ್ಲ ಬಹುಪದಿಗಳು $f=a_0+a_1t+a_2t^2$ಗಳ ಸಂಗ್ರಹ M ಆಗಿದೆ.

(h) Vಯು ಅಭ್ಯಾಸ $2(d)$ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು Mಯು ಅಭ್ಯಾಸ $2(c)$ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

(i) Vಯು ಅಭ್ಯಾಸ $2(b)$ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ರೂಪದ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು M ಆಗಿದೆ,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

5. (12)ರ ಗುಣಧರ್ಮಗಳಲ್ಲಿ ಭಂಗಹೊಂದಿದ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಗುಣವನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿ ಕೆಳಗಿರುವ R^3ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪಗಣ M ಗಳು ಒಂದು ಉಪ ಸಮಷ್ಟಿ ಆಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ,

(a) $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ, ಎಲ್ಲ (x,y,z) ಗಳ ಸಂಗ್ರಹ M ಆಗಿದೆ.

(b) $x-y+z=1$ ಆಗಿರುವಂತೆ, ಎಲ್ಲ (x, y, z) ಗಳ ಸಂಗ್ರಹ M ಆಗಿದೆ.

(c) $x \geq y \geq z$ ಆಗಿರುವಂತೆ, ಎಲ್ಲ (x, y, z) ಗಳ ಸಂಗ್ರಹ M ಆಗಿದೆ.

(d) $x=0$ ಅಥವಾ $y=0$ ಎರಡರಲ್ಲೊಂದು ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ (x, y, z) ಗಳ ಸಂಗ್ರಹ M ಆಗಿದೆ.

6. (a) R^3ನ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿ R^2 ಆಗಿದೆಯೇ ?

(b) R^2ನ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿ U ಆಗಿರಲಿ. $dim\ U$ನ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಬೆಲೆಗಳಾವುವು ?

(c) R^3ನ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿ U ಆಗಿರಲಿ. $dim\ U$ನ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಬೆಲೆಗಳಾವುವು.

(d) R^2ನ ಯುಕ್ತ, ಅಕ್ಷುದ್ರ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ U ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(0, 0)$ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ರೇಖೆ U ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(e) ಕೇವಲ $(0, 0, 0)$ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆ ಅಥವಾ ಸಮತಲ U ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, R^3ನ ಒಂದು ಯುಕ್ತ ಅಕ್ಷುದ್ರ ಉಪ ಸಮಷ್ಟಿ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : ಭಾಗ (c)ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.

7. ಕೆಳಗಿರುವ R^2ನ ಉಪಗಣಗಳಲ್ಲಿ ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು ಮತ್ತು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು ? [ಸೂಚನೆ : ಕೆಲವು ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ 1 ಸಾಕಾಗುತ್ತದೆ ಉಳಿದವುಗಳಿಗೆ ಪ್ರಮೇಯ 6ರ ಟೀಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(a) $\{ (1, 2), (0, 3) \}$ (b) $\{ (1, 1), (-1, -1) \}$

(c) $\{ (2, 1), (1, 2) (3, -1) \}$ (d) $\{ 0, 0), (1,0) \}$
(e) $\{ (3, 1) \}$ (f) $\{ (a, b), (c, d) \}$, ಇಲ್ಲಿ $ad \neq bc$.

8. ಕೆಳಗಿರುವ R^3ನ ಉಪಗಣಗಳಲ್ಲಿ ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು ?
ಸೂಚನೆ : [ಅಭ್ಯಾಸ 7ಕ್ಕೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸೂಚನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.]

(a) $\{ (1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 2, 3) \}$
(b) $\{ (2, 1, 0), (-1, 0, 1) \}$
(c) $\{ (1, 1, 1), (2, 3, 4), (4, 9, 16) \}$
(d) $\{ (1/\sqrt{2}, 0, -1), (\sqrt{3}, 2, 0), (0, -1, 2) \}$
(e) $\{ (1, 2, 1), (-3, 8, 1), (3, -1, -1) \}$

9. ಕೆಳಗಿರುವ V ಸೂಚಿತ ಸಮಷ್ಟಿಯ D ಉಪಗಣಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವುವು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿವೆ ?

(a) $V = R^4$, $D = \{ (1, \sqrt{2}, 0, 1) (2, 1, 0, 0) \}$

(b) $D = \{ x+y, x-y, z \}$ ಆಗಿರುವುದರೊಂದಿಗೆ V ಯು ಅಭ್ಯಾಸ $2(c)$ ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

(c) V ಯು ಅಭ್ಯಾಸ $3(b)$ ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ, ಅದರೊಂದಿಗೆ

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(d) $n = 2$ ಮತ್ತು $D = \{ t-1, t^2+1, 3t^2+2t+1 \}$ ಆಗಿರುವುದರೊಂದಿಗೆ V ಯು ಅಭ್ಯಾಸ $3(a)$ ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

10. ಕೆಳಗಿನ ಸದಿಶಗಳ ಗಣಗಳಿಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ $(4, 2, 1, 0)$ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿದೆಯೇ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ. ಹಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಂತಹ ಒಂದು ಸಂಯೋಜನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ? (ಪ್ರಮೇಯ 6 ರ ಮೇಲಣ ಟೀಕೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ)

(a) $\{ (1, 2, -1, 0), (1, 3, 1, 2), (6, 1, 0, 1) \}$
(b) $\{ (3, 1, 0, 1), (1, 2, 3, 1), (0, 3, 6, 6) \}$

(c) $\{(6, -1, 2, 1), (1, 7, -3, -2), (3, 1, 0, 0), (3, 3, -2, -1)\}$

11. ಸೂಚಿತ ಸಮಷ್ಟಿ M ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸೂಚಿತ ಸಮಷ್ಟಿ V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (ಪ್ರಮೇಯ 6 ರ ಮೇಲಣ ಟೀಕೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ 2ನ್ನು ನೋಡಿರಿ).

   (a) $V+R^3$, $\{(1, 2, 1), (0, -1, 0), (2, 0, 2)\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ M ಆಗಿದೆ.

   (b) $V=R^3$, $\{(-1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ M ಆಗಿದೆ.

   (c) $V=R^4$, $\{(6, -1, 2, 1), (1, 7, -3, -2), (3, 1, 0, 0)\ (3, 3, -2, -1)\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ M ಆಗಿದೆ.

   (d) $V=R^4$, $\{(0, 1, -1, 2), (3, 7, 2, 17), (1, 3, 0, 7), (-5, 3, -26, 1)\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ M ಆಗಿದೆ.

   (e) $n=2$ ಆಗಿರುವುದರೊಂದಿಗೆ, V ಯು ಅಭ್ಯಾಸ $3(a)$ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $\{t-1, t^2+1, 3t^2+2t+1\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ M ಆಗಿದೆ.

12. M ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರುವಂತೆ, ಅಭ್ಯಾಸ 11 (a)–(d)ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿ M ಗಳಿಗೆ ಒಂದೊಂದು ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಾತೃಕೆಗೆ ಸ್ಥಾನವನ್ನು, ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು, ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ,

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -7 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \frac{1}{6} & 1 \\ 1 & -7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 & -5 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 7 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

14. ಅಭ್ಯಾಸ 2ರ ಸಮಷ್ಟಿಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಆಧಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಕೆಳಗಿರುವುವು ಅನಂತ ಆಯಾಮದ ಸದಿಶಸಮಷ್ಟಿಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು. ಗಣಿತದ ಅನೇಕ ಸಂಶೋಧನೆಗಳಲ್ಲಿ ಅವು ಪ್ರಮುಖವಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ,

(a) $\alpha \leq t \leq \beta$ ಗಾಗಿ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಎಲ್ಲ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ವಾಸ್ತವಿಕ (ಅಥವಾ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ) ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ $f(t)$ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗಣ. ಇಲ್ಲಿ $\{f+g\}(t)=f(t)+g(t)$ ಯಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉತ್ಪನ್ನವು $f+g$ ಆಗಿದೆ. $\{af\}(t)=af(t)$ ಯಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉತ್ಪನ af ಆಗಿದೆ.

(b) ಎಲ್ಲ ಬಹುಪದಿಗಳ ಗಣ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಅದಿಶ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಅಭ್ಯಾಸ $2(a)$ ಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದಂತೆ ಇವೆ. [ಅಭ್ಯಾಸ $2(a)$ ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯು ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ. ನಾವು f ಬಹುಪದಿಯನ್ನು $\alpha \leq t \leq \beta$ ಗಾಗಿ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಆಗ ಇದು ಭಾಗ (a) ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಒಂದು ಉಪ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.]

16. ಸದಿಶಸಮಷ್ಟಿ Vಯ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳು M ಮತ್ತು N ಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಸೇರಿದ ಎಲ್ಲ ಸದಿಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು $M \cap N$ ಆಗಿರಲಿ. Mಗೆ ಅಥವಾ Nಗೆ ಅಥವಾ ಎರಡಕ್ಕೂ ಸೇರಿದ ಎಲ್ಲ ಸದಿಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು $M \cup N$ ಆಗಿರಲಿ;

(a) Vಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು $M \cap N$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) R^2ನ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು $M \cup N$ ಆಗಿಲ್ಲದೆ ಇರುವಂತೆ R^2ನ ಎರಡು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳು M ಮತ್ತು N ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(c) $M \neq N$ ಆಗಿರುವಂತೆ M ಮತ್ತು N ಗಳು R^3ನ ಎರಡು ಉಪ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಾಗಿರಲಿ. M ಮತ್ತು N ಗಳು ಸಮತಲಗಳೆಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿರಿ. $M \cap N$ ಒಂದು ರೇಖೆ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

17. (a) (27)ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ (b) (28)ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ. (c) (25)ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ. (d) (37)ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ. (e) (38)ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

18. Aಯು 2×2 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ Aಯು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ನೀಟ ಸಾಲಿನ ಸ್ಥಾನ ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

19. A ಮತ್ತು Bಗಳು ಒಂದೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನೊಳಗೊಂಡ 2×2 ಸಂಕುಚಿಸಿದ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $A = B$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ (ನೋಡಿರಿ: ಅಭ್ಯಾಸ 12 ಭಾಗ–1).

20. ಬೈಜಿಕ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರೀಕರಿಸಬಹುದು; ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ ಈ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಒಂದು ನಿರಂಕುಶ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯೊಳಗೆ, ಅನೇಕ ಸಲ ಸಫಲ ಪರಿಣಾಮಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಂಸ್ಕರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಅವಕಾಶ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಓದುಗನಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಕೊಡುವುದರೊಂದಿಗೆ, ಇಲ್ಲಿ ನಾವೂ ಕೆಲವೊಂದನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ (ಅನೇಕ ಸಲ ಒಂದು ಚಿತ್ರವು ಸಹಾಯಕವಾಗುವುದು).

(a) X ಮತ್ತು Yಗಳು Vಯಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ X ಮತ್ತು Yಗಳ **ನಡುವಿರುವ ರೇಖೆಯು (ಖಂಡವು)** $0 \leq a \leq 1$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $aX + (1-a)y$ ರೂಪದ ಎಲ್ಲ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿದೆ.

(b) x, y ಮತ್ತು z ಗಳು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ x, y ಮತ್ತು z **ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನವು** ($a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ ಮತ್ತು $a + b + c = 1$ ಆಗಿರುವಾಗ) $aX + bY + cZ \geq$ ರೂಪದ ಎಲ್ಲ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿದೆ.

(c) M ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು X ಮತ್ತು Yಗೂ X ಮತ್ತು Y ನಡುವಿನ ರೇಖೆಯು M ನಲ್ಲಿದ್ದರೆ, V ಯಲ್ಲಿರುವ M ಸದಿಶಗಳ ಒಂದು ಸಂಗ್ರಹವನ್ನು **ಪೀನಮಧ್ಯಗಣವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

(d) ಎಲ್ಲ $a \geq 0$, $b \geq 0$ ಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು M ನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Yಗಳಿಗೆ $aX + bY$ ಯು M ನಲ್ಲಿದ್ದರೆ V ಯಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿರುವ Mಸದಿಶಗಳ ಒಂದು ಸಂಗ್ರಹವನ್ನು ಒಂದು **(ಧನಾತ್ಮಕ)** ಶಂಕು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

(e) R^2 ನಲ್ಲಿರುವ $(1, 2)$ ಮತ್ತು $(3, 1)$ ಗಳ ನಡುವಿನ ರೇಖಾ ಖಂಡದ ಒಂದು ಆಲೇಖನವನ್ನು ರೇಖಿಸಿರಿ (ಎಳೆಯಿರಿ).

(f) R^2 ನಲ್ಲಿರುವ $(1, 6)$, $(3, -1)$ ಮತ್ತು $(0, 2)$ ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನದ ಆ ಲೇಖನವನ್ನು ರೇಖಿಸಿರಿ (ಎಳೆಯಿರಿ).

(g) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ (x, y, z) ಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು R^3 ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಪೀನಮಧ್ಯಗಣವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(h) $x \geq y \geq z$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ (x, y, z) ಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು R^3 ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಕೋನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(j) $|X| \geq 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ (x, y) ಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು R^2 ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಪೀನಮಧ್ಯಗಣ ಆಗಿಲ್ಲವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(k) $x \geq 0$, $y \geq 0$ ಮತ್ತು $xy \geq 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ (x, y) ಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು R^2 ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಪೀನಮಧ್ಯಗಣವಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ಆದರೆ ಒಂದು ಶಂಕುವಾಗಿಲ್ಲವೆಂದೂ ತೋರಿಸಿರಿ.

(l) ಶಂಕು ಒಂದು ಪೀನಮಧ್ಯಗಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(m) ತ್ರಿಭುಜ ಒಂದು ಪೀನಮಧ್ಯಗಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(n) ಒಂದು ಸಂಬಂಧಿತ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು ಪೀನಮಧ್ಯಗಣವಾಗಿದೆ ಎಂದ ತೋರಿಸಿರಿ.

(o) M ಒಂದು ಪೀನಮಧ್ಯಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು x, y ಮತ್ತು z ಗಳ M ನಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ x, y ಮತ್ತು z ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನವು M ನಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

21. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಒಂದು ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ,

(a) ಒಂದು 3×3 ಮಾತೃಕೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

(b) R^4 ನಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ನಿರವಲಂಬನೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು.

(c) X, Y ಮತ್ತು Z ಗಳು R^3 ನಲ್ಲಿರುವಲ್ಲಿ, Y ಮತ್ತು Z ಗಳ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯು X ಆಗಿದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು.

ವಿಶೇಷ ಅಭ್ಯಾಸ

ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ರೂಪವು ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯಿಂದ **ಏಕೈಕವಾಗಿ** ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ : ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೊಡಲು** ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಮುನ್ನ ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ಒಂದು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ ಅವಶ್ಯವಿದೆ. ಅದೆಂದರೆ ನಾವು A ಯನ್ನು ಒಂದು ರೀತಿಯಿಂದ ಸಂಕುಚಿತಗೊಳಿಸಿ ಒಂದು ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆ R ಅನ್ನು ಮತ್ತು A ಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಿಂದ ಸಂಕುಚಿತಗೊಳಿಸಿ ಒಂದು ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆ R' ಅನ್ನೂ ದೊರಕಿಸಿದರೆ, ಆಗ $R=R'$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. R ಮತ್ತು A ಗಳು (ಹಾಗೆಯೇ R' ಮತ್ತು A ಗಳು) ಒಂದೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ; (ಪೂರ್ವ ಪಕ್ಷ 3) ಇದರಿಂದಾಗಿ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಅಭ್ಯಾಸ 20 ರ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣವಾಗಿದೆ. ಪ್ರಮೇಯ 1ಕ್ಕೆ ಮುನ್ನ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಂತೆ R ಮತ್ತು R' ಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಒಂದು ಜಾಗರೂಕ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಿರಿ. R ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲೂ R' ನ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿರಲೇಬೇಕೆಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವು R ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲು R' ನ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಾಗಿರಲೇಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಧ್ವನಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. 3×3 ಸಾಧನೆಯನ್ನು ರೇಖಿಸುವುದು ಸಹಾಯಕವಾಗಬಹುದು.]

ಭಾಗ 4 ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯಾದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಉಳಿದ ಬಹು ಭಾಗವು, ವಿಶೇಷವಾಗಿ 3 ಮತ್ತು 4ನೇ ಅಧ್ಯಾಯಗಳು ಅಂಥ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿಧಿಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿವೆ. ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ,

(1)
$$2x+y=a.$$
$$x-y=b.$$

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೂ, a ಮತ್ತು b ಗಳಿಗೆ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು ಮತ್ತು (1) ರ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿತ್ತು. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ (1) ರ ಮತ್ತೊಂದು ಮುಖವನ್ನು ನೋಡೋಣ. (x, y) ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಗೂ, (a, b) ಹೊಸ ಜೋಡಿಯೊಂದನ್ನು (1)

ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ $(x, y)=(0, 1)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(a, b)=(1, -1)$. ಬೇರೆ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ (x, y) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಗೂ, (1) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗಣಿಸಲಾಗುವ (a, b) ಜೋಡಿಯನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸುವ ಒಂದು ಸೂತ್ರ ವಿಧಿ (1) ಅಂಥ (x, y) ಜೋಡಿಗಳಿಗೆ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಮತ್ತು (a, b) ಜೋಡಿ ಗಳಲ್ಲಿ ಫಲಿಸಿದೆ. ಒಂದು ಸೂತ್ರವಿಧಿ ಅಥವಾ ಗಣಾಯೋಜನೆಯನ್ನು R^2 ಗೆ R^2 ನ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆ (ಚಿತ್ರಣ ಉತ್ಪನ್ನ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ನಾವು (x, y) ಜೋಡಿಯು (1) ರಿಂದ (a, b) ಜೋಡಿಗೆ **ಪರಿವರ್ತಿಸಲಾಗಿದೆ** (ಚಿತ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ) ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ $(0, 1)$ ಎನ್ನುವುದು (1) ರ ಮೂಲಕ $(1, -1)$ ಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆಯೇ $(3, 2)$ ಎನ್ನುವುದು (1) ರ ಮೂಲಕ $(8, 1)$ ಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

(1) ರಂತೆಯೇ ಇರುವ ಗಣನಾಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವುದರಿಂದ (1) ರ ಸೂತ್ರ ವಿಧಿಗಳಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸಲು ಒಂದು ಬಿಡಿ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಬಳಸುವುದು ಅನುಕೂಲಕರ. ನಾವು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ T ಅಕ್ಷರ ವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ (ಅಥವಾ ವರ್ಣಮಾಲೆಯಲ್ಲಿ T ಗಿಂತ ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ ಬರುವ P, Q, R ಮತ್ತು S ಗಳಂಥ ಇತರ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು). ನಾವು (1) ರಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪರಿವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಆಸಕ್ತರಾಗಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಬಲಪಡಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಪುನಃ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

(2) $$T(x, y)=(2x+y, x-y)$$

ಸಮೀಕರಣ (2) ನಮಗೆ (x, y) ಜೋಡಿಯು T ಯಿಂದ $(2x+y, x-y)$ ಜೋಡಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆಯೆಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಈ ಪದಗಳಲ್ಲಿ $T(0, 1)=(1, -1)$ ಮತ್ತು $T(3, 2)=(8, 1)$ ಎಂದು ಪಡೆಯಬಹುದು.

(3) $$S(x, y)=(x^2, y^2)$$ ಈ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

(3) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಸೂತ್ರವಿಧಿಯು (2) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಸೂತ್ರವಿಧಿ ಯಿಂದ ಒಂದು ಸಾರಭೂತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ S ನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಅರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ. ಆದರೆ, T ಯನ್ನು ವಿವರಿಸುವವು ಗಳು ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ. R^2 ಒಂದು ಸದಿಶಸಮಷ್ಟಿ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಇವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ T ಯು ನಮ್ಮ ಬೈಜಿಕ ರಚನೆ

ಯನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸುತ್ತದೆ, S ಹಾಗಿಲ್ಲ. ಸದಿಶ $c(3, 2)+d(0,1)=(3c,2c+d)$ ಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ,

$$(4)\quad T(3c, 2c+d)=(2(3c)+(2c+d),\ (3c)-(2c+d)\ )$$
$$=(8c+d,\ c-d),$$

$$(5)\quad S(3c,\ 2c+d)\ =\ (\ (3c)^2, (2c+d)^2)\ =\ (9c^2, 4c^2+4cd+d^2)$$

ಹೀಗೆ

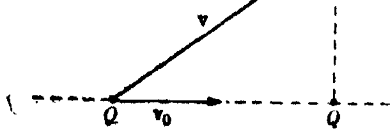
$$(6)\quad T(3c, 2c+d)=c(8,1)+d(1,\ -1)=cT(3,\ 2)+dT(1,\ -1),$$

$$(7)\quad S(3c,\ 2c+d)=c^2(9,\ 4)+(4cd+d^2)\ (0,1)$$
$$=c^2S(3,2)+(4cd+d^2)S(0,\ 1).$$

ಹೇಳಿಕೆ (6) ನಮಗೆ T ಯು $\{ (3, 2), (0, 1 \}$ ರ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯನ್ನು ಅದೇ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆ $\{ T(3,2))\ T(0,\ 1,\ \}$ ಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಹೇಳಿಕೆ (7) ನಮಗೆ S ಈ ಗುಣಧರ್ಮವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲವೆಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ.

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನು **ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ; ಇನ್ನುಳಿದ ಎಲ್ಲ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು ಅರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ ಎನಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತುತ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳಿಗೆ ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸೋಣ.

ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಒಂದು ಕುತೂಹಲಕರ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು V, ಬಾಣಗಳ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಬಹುದು. V ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಅಶೂನ್ಯ ಸದಿಶವು V_0 ಆಗಿರಲಿ. V ಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸದಿಶವು V ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ನಾವು $P(V)$ ಯನ್ನು V_0 ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ V ಯ **ಪ್ರಲಂಬನರೇಖೆ** ಎಂದು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ವಿವರಣೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇದೆ. $_0$ ವರೆಗೆ ಇರುವ ರೇಖೆಗೆ V ಯ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವಿ



ಚಿತ್ರ-2

ನಿಂದ ಒಂದು ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಯೊಡನೆ ಅದರ ಛೇದನವನ್ನು Q ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ. (ಚಿತ್ರ-1 ನೋಡಿರಿ) ಆಗ

(8) $P(v) = \overrightarrow{OQ}$.

ಈ ಪರಿವರ್ತನೆಯು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಗಳನ್ನೂ ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಏಕೆಂದರೆ

(9) V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ V_1 ಮತ್ತು V_2 ಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a ಮತ್ತು b ಗಳಿಗೆ $P(av_1 + bv_2) = aP(v_1) + bP(v_2)$.

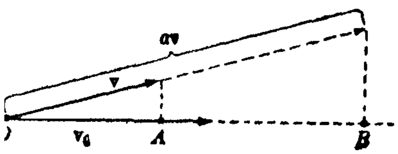
(9) ನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದು ಸ್ವಲ್ಪ ಕಷ್ಟ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು (9) ಸಿದ್ಧಿಸುವಂತಹ ಸುಲಭವಾದ ಎರಡು ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸೋಣ. ಅವು ಹೀಗಿವೆ.

(10) $P(av) = aP(v)$ ಇದು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ v ಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ a ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ;

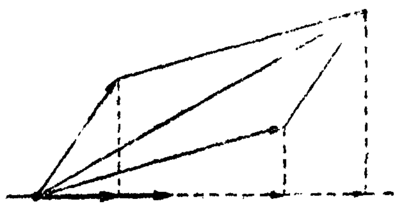
(11) $P(v_1 + v_2) = P(v_1) + P(v_2)$ ಇದು V ಯಲ್ಲಿರುವ v_1 ಮತ್ತು v_2 ಗಳಿಗೆ.

(10) ಮತ್ತು (11) ಸಮೀಕರಣಗಳು ಈಗ ಸರಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತವೆ. ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಓದುಗನಿಗೆ ಬಿಟ್ಟಿದೆ. ಚಿತ್ರ 2 ಮತ್ತು 3 ಸಹಾಯಕವಾಗುವುವು.

(9) ನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಲು ನಾವು (10) ಮತ್ತು (11) ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬಳಸಬಹುದು. (11) ರ ಉಪಯೋಗದಿಂದ $P(av_1 + bv_2) = P(av_1) + P(bv_2)$. (10) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲು $P(av_1) = aP(v_1)$ ಮತ್ತು $P(bv_2) = bP(v_2)$ ಇವೆರಡೂ ಸಂಯುಕ್ತವಾಗಿ ಸೇರಿ (9) ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ-2



ಚಿತ್ರ-3

ನಾವು ಭಾಗ (6 ರಲ್ಲಿ ನೋಡುವಂತೆ, P ಪರಿವರ್ತನೆಗೆ (2) ಕ್ಕೆ ಸದೃಶವಾದ

ಒಂದು ಬೈಜಿಕ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. ನಾವು ಈಗ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. V ಮತ್ತು W ಗಳು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಾಗಿರಲಿ. V ಯಿಂದ W ಗೆ ಒಂದು T **ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು**, W ಗೆ ಸೇರಿರುವ, TX ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲ್ಪಡುವ, ಒಂದು **ಏಕೈಕ** ಸದಿಶವನ್ನು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸದಿಶ X ಗೆ ನಿರ್ದೇಶಿಸುವ ಒಂದು ಸೂತ್ರವಿಧಿಯಾಗಿದೆ. ಇಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ, X ಮತ್ತು Y ಗಳು V ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು a ಮತ್ತು b ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$(2) \qquad T\,(ax+by)=aTX+bTY.$$

ಟೀಕೆಗಳು : ಪರಿವರ್ತನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯು ವಿವರಿಸಲ್ಪಡದ 'ಸೂತ್ರವಿಧಿ' ಎಂಬ ಪದದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಇದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡದ ಈ ಪದವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಸಾಕಷ್ಟು ವಿಷಯಾಂತರ ಮಾಡುವುದರ ಬದಲಾಗಿ 'ಸೂತ್ರವಿಧಿ' ಎಂದು ಹೇಳುವುದರ ಅರ್ಥ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. (ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಒಂದು ಸಂಗ್ರಹವನ್ನು ನಾವು ಸಂಚಯಿಸುತ್ತ ಹೋದಂತೆ ಅದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.) ಪರಿವರ್ತನೆ ಎಂಬ ಪದವು 'ಉತ್ಪನ್ನ' 'ಚಿತ್ರಣ' 'ಏಕಮೌಲ್ಯದ ಸಂಬಂಧ' ಮತ್ತು 'ಸಂವಾದಿತ್ವ' ಎಂಬುವುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡು ಅನೇಕ ಪರ್ಯಾಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಉತ್ಪನ್ನದ ಸಷ್ಟರ ಪರಿಭಾಷನೆಯನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅಲ್ಲಿ ಅದರ ಅರ್ಥವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸಲು 'ಆಲೇಖನ'ದ ಪರಿಭಾಷನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಆಲೇಖನ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿ ಅನುಪಯುಕ್ತ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ (2) ರ ಒಂದು ಆಲೇಖನವು ನಾಲ್ಕು ಆಯಾಮದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ; ಇದು ಮನದಟ್ಟು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಕಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

ನಾವು ಭಾಗ 6 ರಲ್ಲಿ ನೋಡುವಂತೆ, ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ (2) ಕ್ಕೆ ಸದೃಶವಾದ ಒಂದು ಸೂತ್ರವಿಧಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಹೇಗಾದರೂ ಗಣನೆಯಲ್ಲಿ ವಿನಾ (12) ನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ ಸೂತ್ರವಿಧಿಗಳಂತೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನು ಆಲೋಚಿಸುವುದು ಸುಲಭತರವಾಗಿದೆ.

(12) ರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೀಗೆ ಪುನಃ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು,

(a) $T(aX) = aTX$ ಇದು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ a ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ.

(3) (b) $T(X+Y=)TX+TY$ ಇದು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ.

ಇದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನೇ (10) ಮತ್ತು (11) ರಿಂದ (9) ನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸುವಾಗ ುಪಯೋಗಿಸಲಾಯಿತು. (12) ಮತ್ತು (13) ರ ಸಮಾನಾರ್ಥಕತೆಯ ಸಾಧ ುನ್ನು ಒಂದು ಅಭ್ಯಾಸದಂತೆ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ (10) ಮತ್ತು (11) ರಿಂದ 9) ನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸುವುದರ ನಕಲು ಆಗುತ್ತದೆ. (13) ಕ್ಕಿಂತ (12) ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ (12) ನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು.

ಇದಲ್ಲದೆ ಯಾವುದೇ ಅಪಾರ್ಥವೂ ಪರಿಣಮಿಸದಿರುವಾಗ ಪ್ರಕ್ಷೇಪ ಚಿನ್ಹೆಗಳನ್ನು ಕೈಬಿಡುವ ಸಂಪ್ರದಾಯವನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು T ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆ ಮತ್ತು X ಒಂದು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರು ವಾಗಲೆಲ್ಲ, $T(X)$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದಕ್ಕಿಂತ, TX ಎಂದೇ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅನೇಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ಅಂದರೆ (12) ನ್ನು ಪಾಲಿಸದಿದ್ದರೂ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳಿಗೆ ಸದೃಶವಾದ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರು ತ್ತವೆ. ಕೆಳಗೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ,

(4) $$S(x, y) = (2x+1, y-2)$$

ಹೀಗೆ R^1 ನಿಂದ R^2 ಗೆ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆಯು S ಆಗಿದೆ. S ಅನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೂ, [12] ರ ಗುಣಧರ್ಮವನ್ನು S ಹೊಂದಿಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $S(2(3, 2)+(0, 1)) \neq 2S(3, 2)+S(0, 1)$. ಹೇಗಾದರೂ S ಅನ್ನು $S(x, y) = (2x, y)+(1, -2)$ ಎಂದು ಪುನಃ ಬರೆದರೆ ಆಗ S ಎರಡು ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ 'ಮೊತ್ತ'ವಾಗಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯದು (x, y) ಅನ್ನು $(2x, y)$ ಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡನೆಯದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸದಿಶವನ್ನೂ $(1, -2)$ ಸದಿಶಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ S ಒಂದು **ಸಂಬಂಧಿತ** ಪರಿವರ್ತನೆಗೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಯಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮುಷ್ಟಿ W ಗೆ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮುಷ್ಟಿ V ಯ ಒಂದು **ಸಂಬಂಧಿತ ಪರಿವರ್ತನೆಯು** W ಗ V ಯ ಕೆಳಗಿನ ರೂಪದ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ.

(15) $$SX = TX + Y^0,$$

ಇಲ್ಲಿ Tಯು W ಗೆ V ಯ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು Y^0 ವು W ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸದಿಶವಾಗಿದೆ. ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಕೆಲವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧಿತ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತವೆ.

ಗುಣಧರ್ಮ (12) ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸದಿಶಗಳಿಗೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತದೆ.

(16) T ಯು W ಗೆ V ಯ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (16) V ಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ $X^1, X^2, \ldots, X^k$ ಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ $a_1, a_2, \cdots, a_k$ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ $T(a_1 X^1 + a_2 X^2 + \cdots + a_k X^k) = a_1 TX + a_2 TX^2 + \cdots + a_k TX^k$.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳಿಗೆ (16) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದರೆ, $T(a_1X^1 + a_2X^2) + a_3X^3) = T((a_1X^1 + a_2X^2) + a_3X^3) = T(a_1X^1 + a_2X^2) + a_3TX^3 = a_1TX^1 + a_2TX^2 + a_3TX^3$ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ.

T ಯು W ಗೆ V ಯ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ V ಯನ್ನು T ಯ **ಪ್ರಭಾವ ಕ್ಷೇತ್ರ** ಅಥವಾ T ಯು ಅದರ ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಮಷ್ಟಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. V ಯಲ್ಲಿರುವ X ಗೆ TX ರೂಪದ W ನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಸದಿಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹವನ್ನು T ಯ **ವ್ಯಾಪ್ತಿ** ಅಥವಾ **ಪ್ರತಿಬಿಂಬ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಸಮೀಕರಣ $TX = Y$ ಯು V ಯಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ X ಅನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತೆ W ನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ Y ಗಳ ಗಣವಾಗಿದೆ. $W = V$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು **ಪರಿಕರ್ಮಿ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ನಮ್ಮ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸುತ್ತವೆ. R^2 ನಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶ (a, b)ಯು,

$$x = \frac{a+b}{3} \text{ ಮತ್ತು } y = \frac{a-2b}{3};$$

ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $(2x+y, x-y)$ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ, (2) ರಿಂದ

ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪರಿವರ್ತನೆಯು R^2 ಅನ್ನು ತನ್ನ ಪ್ರಭಾವ ಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು R^2 ಅನ್ನು ತನ್ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಾಗಿಯೂ ಹೊಂದಿದೆ. ಅಂದರೆ, (a, b) **ಯಾವುದೇ** ಜೋಡಿಗೆ (1) ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. (8) ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಪರಿವರ್ತನೆಯು V ಯನ್ನು ತನ್ನ ಪ್ರಭಾವ ಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿ ಹೊಂದಿದೆ. ಅದರ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು V_0 ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎಲ್ಲ ಬಾಣಗಳಿಂದ ಆಗಿವೆ.

(2) ರ ಮತ್ತು (8) ರ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಾಗಿವೆ. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಲ್ಲದ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ,

(17) $$T(x, y, z) = (2x + y - z,\ x + y - z)$$

(17) ರ ಪ್ರಭಾವ ಕ್ಷೇತ್ರವು R^3 ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, ಅದರ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು R^2 ಆಗಿದೆ: ಇದು R^3 ನಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿಲ್ಲ.

ಎರಡು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಸರಳ ಆಗಿವೆ. ನಾವು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸದಿಶವನ್ನೂ W ಯಲ್ಲಿರುವ ಶೂನ್ಯ ಸದಿಶವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಈ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು 0 ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು W ಗೆ V ಯ **ಶೂನ್ಯ ಪರಿವರ್ತನೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ವಿಧಿವಿಹಿತವಾಗಿ (ನಿಯಮಾನುಸಾರ) ವಿವರಣೆ ಇಂತಿದೆ.

[18] V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ, $0X = 0$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ W ಯಲ್ಲಿರುವ [ಹಾಗೆಯೇ V ಯಲ್ಲಿರುವ] ಶೂನ್ಯ ಸದಿಶವನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸಿದಂತೆ, ಅದೇ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಈ ಪರಿವರ್ತನೆಗೂ ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಕದಮೆ ತೊಡಕಿನದಾಗಿದೆ. [18] ರಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಈ ಪರಿವರ್ತನೆಯು (2) ನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ.

V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗೆ ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮವು ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ನೀಡುತ್ತದೆ,

(19) $I_V X = X$, ಇದು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ X ಗಳಿಗೆ,

I_V ಯು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸದಿಶವನ್ನು ಸ್ಥಿರಪಡಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಕಾರಣಗಳಿಗಾಗಿ, V ಯ ಮೇಲಿನ ಸಾಮ್ಯಪರಿಕರ್ಮಿ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ (19) ರಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು (12) ನ್ನು

ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. V ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಂಡ ಮೇಲೆ, ನಾವು I_V ಯನ್ನು ಬಿಡಿ ಚಿನ್ಹೆ I ನಿಂದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

(2) ಪರಿವರ್ತನೆಯು [1] ರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯೊಡನೆ ಒಂದು ನಿಕಟ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇದನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸೋಣ. R^nನಿಂದ R^mಗೆ T ಯು ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ. $X^1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $X^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0) \ldots$, $X^n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ V ಗೆ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. $j = 1, 2, \ldots, n$ಗೆ, R^m ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶವು TX^j ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು,

$$(20) \qquad TX^j = (A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{mj}).$$

A_{ij} ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು T ಯ **ಮಾತೃಕೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ; ಅಂದರೆ A ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆ, ಇಲ್ಲಿ

$$(21) \qquad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

$j = 1, 2, \ldots, m$ಗೆ, A ಯ j ನೇ ನೀಟಸಾಲು TX^jಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿಂದ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ (2)ರಲ್ಲಿ, $T(1, 0) = (2, 1)$ ಮತ್ತು $T(0,1) = (1, -1)$ ಇರುವುದರಿಂದ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ಇದು (1) ರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ (17) ರಲ್ಲಿ, $T(1, 0, 0) = (2, 1)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ ಮತ್ತು $T(0, 0, 1) = (-1, -1)$ಆಗಿರುವುದರಿಂದ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

R^n ನಿಂದ R^mಗೆ ಯಾವುದೇ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು (2) ಅಥವಾ (17) ರಂತಹ ಒಂದು ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು (20) ಅನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ರಚಿತವಾದ R^nಗೆ ಆಧಾರವು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಆಗಿರಲಿ, $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ [(16) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ] $X=x_1X^1+x_2X^2,+\cdots+x_nX^n$ ಮತ್ತು $TX=x_1TX^1+x_2TX^2+\cdots+x_nTX^n$. ಹೀಗೆ $TX=x_1(A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{m1})+x_2(A_{12}, A_{22}, \ldots, A_{m2})+\cdots+x_n(A_{1n}, A_{2n}, \ldots, A_{mn})$. ಇದನ್ನೇ ಪುನಃ ನಿರೂಪಿಸುವುದರಿಂದ

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (&A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n, \\ &A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n, \ldots, \\ &A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n). \end{aligned} \tag{22}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಟೀಕೆಗಳು : (21) ನ್ನು ಅಥವಾ (22) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು R^n ನಿಂದ R^m ಗೆ ರೇಖಾತ್ಮ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಅಥವಾ ಮಾತೃಕೆಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಸ್ಕರಿಸಬಹುದು. ಇತಿಹಾಸ ರೀತ್ಯವಾಗಿ, ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಅಧ್ಯಯನವು ಹುಟ್ಟಿದ ರೀತಿಯೇ ಇದಾಗಿದೆ. ಗಣನಾತ್ಮಕವಾಗಿ, (21) ಅಥವಾ (22), (12)ಕ್ಕಿಂತ ಬಹಳ ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಅಧಿಕ ಅಂಕನವು ಇರುವುದರಿಂದ ಬಹಳ ಸಲ ಪರಿಣಾಮಗಳ ಸರಳತೆಯನ್ನು ನುಸಳಿಸುವುದರಿಂದ, (21) ಮತ್ತು (22) ರ ಉಪಯೋಗವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಬಹಳ ತೊಡಕಿನದಾಗಿದೆ. ಇದಲ್ಲದೆ, ಅನೇಕ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುತ್ತವೆ. ಅನೇಕ ಸಲ ಅಂತಹ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನು (21) ರ ಅಥವಾ (22) ರ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸುವುದು ಸಮಯದ ಅಪವ್ಯಯವಷ್ಟೆ. ಈ ಕಾರಣಗಳಿಗಾಗಿ (12) ರ ಗುಣಧರ್ಮವನ್ನೇ ಬಲಪಡಿಸಿ, (21) ಮತ್ತು (22)ನ್ನು ಸಹಾಯಕ ಗಣನಾತ್ಮಕ ಸಾಧನಗಳೆಂದು ಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಇಲ್ಲಿ ಹುಟ್ಟುತ್ತದೆ. T ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು, J ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು (20) ಆಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯಂತೆ ಏಕೆ ವಿವರಿಸಬಾರದು? ನಾವು ಇದನ್ನು ಏಕೆ ಮಾಡಲಾರೆವೆಂಬುದಕ್ಕೆ ಯಾವ ಕಟ್ಟಿನ ಕಾರಣವೂ ಇಲ್ಲ ಮತ್ತು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಅನೇಕ ಪಠ್ಯಗಳು ಹಾಗೆ ಮಾಡುತ್ತವೆ. (21) ರ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಇದು ಮುಂದಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.

T ಯು (22) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿದ್ದರೆ, T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು ? R^mನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶವು $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಕೇವಲ $T\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ ಯು, R^nನಲ್ಲಿ $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ಎಂಬ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ; $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ಯು T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. (22)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪುನಃ ನಿರೂಪಿಸಿದಲ್ಲಿ, ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಹೊಂದುವೆವು.

ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯೂಹವು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದೇ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ

$$(23)\qquad \begin{aligned} y_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n \\ y_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n. \end{aligned}$$

$(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ ಯು Tಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿದೆ ;

(23) ನ್ನು ಸಂಸ್ಕರಿಸುವ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಭಾಗ 2, (18) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ನಾವು, ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲವು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ:

ಪ್ರಮೇಯ 7. V ಯಿಂದ W ಗೆ ಆದ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು T ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಕೆಳಗಿರುವುದು ನಿಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(a) $T0 = 0$

(b) U ಯು ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು V ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ V ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು, ಅಂದರೆ, V ನಲ್ಲಿರುವ X ನೊಂದಿಗೆ ಎಲ್ಲ TX ಗಳ ಗಣವು, W ನ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ : $T0_V = T(0.0_V) = 0.T(0_V) = 0_W$ ಎಂದಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ 0 ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. 0_V ಯು V ಯ ಮತ್ತು 0_W ವು W ನ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದೆ. ಈಗ V ಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು U ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು U_0 ವು U ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ 0 ಯು V ನಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು $To = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, 0 ಯು U_0 ನಲ್ಲಿದೆ. Y^1 ಮತ್ತು Y^2 ಗಳು, U_0ನಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ ನಾವು $TX^1 = Y^1$

ಮತ್ತು $TX^2 = Y^2$ ಆಗಿರುವಂತೆ U ನಲ್ಲಿ X^1 ಮತ್ತು X^2 ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. U ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ $X^1 + X^2$ ಯು U ನಲ್ಲಿದೆ. ಆದರೆ $T(X^1 + X^2) = TX^1 + TX^2 = Y^1 + Y^2$. ಹೀಗಾಗಿ $Y^1 + Y^2$ ಗೆ ಪರಿವರ್ತಿತವಾಗಿರುವ, $X^1 + X^2$ ಎಂಬ ಒಂದು ಸದಿಶವನ್ನು U ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಕಂಡು ಹಿಡಿದಿರುವುದರಿಂದ, $Y^1 + Y^2$ ಯು U_0 ನಲ್ಲಿದೆ. U_0 ನಲ್ಲಿ Y ಇರಲಿ ಮತ್ತು $TX = Y$ ಆಗಿರುವಂತೆ U ನಲ್ಲಿ X ಅನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರಿ. ಆಗ $aY = a(TX) = T(ax)$ ಆಗುವುದರಿಂದ aY ಕೂಡ U_0 ನಲ್ಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ W ನ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು U_0 ಆಗಿದೆ. Q.E.D.

R^2 ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು T ಆಗಿರಲಿ. ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಗಳನ್ನು R^2 ನ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳಿಗೆ ಅಂದರೆ, (0, 0) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗೆ, (0, 0) ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೆಗೆ ಅಥವಾ ಸ್ವಯಂ R^2 ಮೂಲಕ T ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಪ್ರಮೇಯ 7 ಹೇಳುತ್ತದೆ. T ಯು ಆಯಾಮವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುವುದೇನೆಂದರೆ, T ಯು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಿಗೆ ಅಥವಾ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ರೇಖೆಗೆ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು.

ಪ್ರಮೇಯ 7 ರ ವಿಶಿಷ್ಟ ಪ್ರಸಂಗವು ಒಂದು ಕುತೂಹಲಕರವಾಗಿದೆ. $U = V$ ಆಗಿದ್ದರೆ, V ಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ V ಆಗಿದೆ. ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ U ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಾಗಿದೆಯಾದ್ದರಿಂದ ನಾವು T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು W ನ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 7 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ T, V, W ಮತ್ತು U ಗಳು ಇವೆಯೆಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. U ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು U_0 ಆಗಿರಲಿ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು U ವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಿ. Y ಯು U_0 ನಲ್ಲಿರುವ ಮತ್ತು $TX = Y$ ಆಗಿರುವಂತೆ U ನಲ್ಲಿ X ಇರಲಿ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು U ವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದರಿಂದ, $X = c_1X^1 + c_2X^2 + \cdots + c_kX^k$ ಆಗಿರುವಂತೆ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆಗ $Y = TX = c_1TX^1 + c_2TX^2 + \cdots + c_kTX^k$; ಅಂದರೆ $\{TX^1, TX^2, \ldots, TX^k\}$ ಯ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯು Y ಆಗಿದೆ. T ಯು ನಿರ್ಮಿತವಾಗುವ ಗಣಗಳನ್ನು,

ನಿರ್ಮಿತವಾಗುವ ಗಣಗಳನ್ನಾಗಿ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಇದರಿಂದ ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಇನ್ನಷ್ಟು ನಿಖರವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ

(24) $\{ X^1, X^2,\ldots,X^k \}$ ಯು U ವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದರೆ, ಆಗ $\{ TX^1, TX^2, \ldots, TX^k\}$ ಯು U ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ನಾವು ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. (25) U ನ ಆಯಾಮವು U ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬದ ಆಯಾಮಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ T ಯು ಆಯಾಮವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ನೋಡಬೇಕಾದರೆ, $\{ X^1, X^2,\ldots, X^k \}$ ಯು U ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ (24) ರಿಂದ $\{ TX^1, TX^2,\ldots,TX^k \}$ ಯು V ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತದೆ. ಭಾಗ 3 ರ [28] ರಿಂದ V ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬದ ಆಯಾಮ $U \leq k = dim\ U$ ಎಂದು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಆಯಾಮವು ಒಂದು ಮಹತ್ವದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. $V = R^n$ ಮತ್ತು $W = R^m$ ಆಗಿರುವ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ, T ಯ ಮಾತೃಕೆಯ ಸ್ಥಾನವೂ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು T ಯ ಸ್ಥಾನ ಎಂದು ಕರೆಯುವುದರಲ್ಲಿ ಏನೂ ತೊಂದರೆಯಿಲ್ಲ. ನಾವು ಇದನ್ನು ಸ್ಥಾನ (T) ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸ್ಥಾನ (T) ಯು T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಆಯಾಮವಾಗಿದೆ.

T ಯೊಡನೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಮುಖ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು ಕೆಳಗಿನದರಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ,

(26) $TX = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯಲ್ಲಿರುವ X ಸದಿಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು V ಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ. ಈ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು T ಯ ಶೂನ್ಯ **ಸಮಷ್ಟಿ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದರ ಆಯಾಮವನ್ನು T ಯ **ಶೂನ್ಯತೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಶೂನ್ಯತೆ (T) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

T ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿರಲಿ. $T0 = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ನಾವು 0 ಯು M ನಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. X^1 ಮತ್ತು X^2 ಗಳು M ನಲ್ಲಿರಲಿ.

ಆಗ $TX^1 = TX^2 = 0$. ಹೀಗೆ $0 = TX^1 + TX^2 = T(X^1 + X^2)$ ಆಗುವುದರಿಂದ $X^1 + X^2$, M ನಲ್ಲಿದೆ. $TX = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$0 = aTX = T(aX)$$

ಆಗುವುದರಿಂದ M ನಲ್ಲಿ X ಇದ್ದರೆ aX ಕೂಡ M ನಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇದು (26)ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಡನೆ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸೋಣ. T ಯು (2) ರಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $T(3, 2) = (8, 1)$. ಅಲ್ಲದೆ $T(3c, 2c) = (8c, c)$; ಅಂದರೆ T ಯು $\{(3, 2)\}$ ರಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು $\{T(3, 2)\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ. $T(x, y) = (0, 0)$ ಸಮೀಕರಣವು $(x, y) = (0, 0)$ ಎಂದು ನಿರ್ಬಂಧಿಸುವುದರಿಂದ T ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯು ಕೇವಲ $(0, 0)$ ಯಿಂದ ಮಾತ್ರ ಆಗಿದೆ. T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು R^2 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ Tಯ ಸ್ಥಾನವು 2 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ (8) ರಲ್ಲಿ, V_0 ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ, 0 ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಮತಲವು P ಯಿಂದ 0 ಗೆ ಪರಿವರ್ತಿತವಾಗಿವೆ. 0 ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಿರುವ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಸಮತಲವು V_0 ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಿರುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅದರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವಾಗಿ ಹೊಂದಿದೆ. P ಯಿಂದ 0 ಗೆ ಪರಿವರ್ತಿತವಾದ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶವು V_0 ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ 0 ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಿರುವ ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯೇ ಇರಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಶೂನ್ಯತೆ $(P) = 2$. ಇಷ್ಟಲ್ಲದೆ P ಯ ಶ್ರೇಣಿಯು V_0ನ ಎಲ್ಲ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಸ್ಥಾನ $(P) = 1$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ (18) ರಲ್ಲಿ, ನಾವು ಶೂನ್ಯತೆ $(0) = dim\ V$ ಮತ್ತು ಸ್ಥಾನ $(0)0 =$ ಎಂದು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. (19) ರಲ್ಲಿ ನಾವು ಶೂನ್ಯತೆ $(I_V) = 0$ ಮತ್ತು ಸ್ಥಾನ $(I_V) = dim\ V$ ಎಂದೂ (17) ರಲ್ಲಿ ನಾವು ಸ್ಥಾನ $(T) = 2$ ಎಂದೂ ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಏಕೆಂದರೆ (a,b)ಯ ಯಾವುದೇ ಆಯ್ಕೆಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ,

$$a = 2x + y - z$$
$$b = x + y - z$$

ಈ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಮಾತೃಕೆಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯು ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ಇದರ ಆಯಾಮ 1.

ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ, T ಯು R^n ನಿಂದ R^mಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ T ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯೂ, ಮಾತೃಕೆ (21) ರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯೂ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯು (22) ರಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$ ಎಂದು ಹೇಳುವುದೂ ಅಥವಾ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಹೇಳುವುದೂ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ,

$$(27)\qquad \begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= 0 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x^n &= 0, \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ಎನ್ನುವುದು T ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗುವುದು ಕೇವಲ ಅದು (27) ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

ಸ್ಥಾನ (T) ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆ (T) ಗಳ ನಡುವಣ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ,

ಪ್ರಮೇಯ 8. V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು Tಯು V ಯಿಂದ Wಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಸ್ಥಾನ $(T) +$ ಶೂನ್ಯತೆ $(T) = dim\ V$.

ಸಾಧನೆ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು Tಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ 2 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, Vಯ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಆಗಿರುವಂತೆ $\{X^{k+1}, X^{k+2}, \ldots, X^n\}$ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. (ನಾವು $k = 0$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು, ಇಲ್ಲಿ Vಗೆ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ನಿರಾಯಾಸವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ) ಆಗ (24) ರಿಂದ T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು $\{TX^1, TX^2, \ldots, TX^n\}$ ಯು ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತದೆ. ಹೇಗಾದರೂ, T ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಹೀಗೆ $TX^1 = TX^2 = \cdots = TX^k = 0$. ಇದರಿಂದ T ಯ

ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು $\{TX^{k+1}, TX^{k+2}, \ldots, TX^n\}$ ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತದೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. $\{TX^{k+1}, TX^{k+2}, \ldots, TX^n\}$ ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವೆಂದೂ ಮತ್ತು ಈ ಕಾರಣದಿಂದ T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. $c_{k+1}TX^{k+1} + c_{k+2}TX^{k+2} + \cdots + c_nTX^n = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $0 = T(c_{k+1}X^{k+1} + c_{k+2}X^{k+2} + \cdots + c_nX^n)$; ಅಂದರೆ ಸದಿಶ $X = c_{k+1}X^{k+1} + c_{k+2}X^{k+2} + \cdots + c_nX^n$ ವು T ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಸೇರಿದೆ. ಇದು $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಹೀಗೆ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $X = c_1X^1 + c_2X^2 + \cdots + c_kX^k$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಪುನಃ ನಿರೂಪಿಸುವುದರಿಂದ $0 = X - X = -c_1X^1 - c_2X^2 - \cdots - c_kX^k + c_{k+1}X^{k+1} + c_{k+2}X^{k+2} + \cdots + c_nX^n$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬನೆಯಿಂದ $-c_1 = -c_2 = \cdots = -c_k = c_{k+1} = c_{k+2} = \cdots = c_n = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. $c_{k+1}TX^{k+1} + c_{k+2}TX^{k+2} + \cdots + c_nTX^n = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $c_{k+1} = c_{k+2} = \cdots = c_n = 0$ ಆಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. Tಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ $\{TX^{k+1}, TX^{k+2}, \ldots, TX^n\}$ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಶೂನ್ಯತೆ $(T) = k$, $\dim V = n$ ಮತ್ತು ಸ್ಥಾನ $(T) = n-k$. ಇದೇ ನಮ್ಮ ಇಚ್ಛಿತ ಫಲಿತಾಂಶವಾಗಿದೆ. Q.E.D.

ಟೀಕೆಗಳು : ಇದು ಓದುಗನು ಹೆಚ್ಚು ಜಾಗರೂಕತೆಯಿಂದ ಅಭ್ಯಸಿಸಬೇಕಾದಂತಹ ಒಂದು ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯವಾಗಿದೆ. T ಯ ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿದೆವೆಂದೂ, Vಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿದೆವೆಂದೂ ಮತ್ತು ಅಧಿಕ ಸದಿಶಗಳ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳು T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ರೂಪಿಸಿದವೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿದೆವೆಂಬುದನ್ನೂ ಗಮನಿಸಿರಿ. ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು ಒಳಗೊಳ್ಳಲ್ಪಟ್ಟಿತ್ತು ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನೂ, $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು V ಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿತು ಎಂಬುದನ್ನೂ, $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿತು ಎಂಬುದನ್ನೂ ಕೊನೆಯದಾಗಿ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ನಿರವಲಂಬಿಯಾಗಿತ್ತು ಎಂಬುದನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆವು. ಈ ಆಧಾರಗಳ ಜಾಗರೂಕ ಆಯ್ಕೆಯ ತಂತ್ರವು ಮುಂದೆ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಅಲ್ಲದೆ ಕೆಲವು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲೂ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿರುವುದು.

$V = R^n$ ಮತ್ತು $W = R^n$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು A ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆ ಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಸ್ಥಾನ (T) = ಸ್ಥಾನ (A) ಎಂದು ತೋರಿಸಲು 6 ಮತ್ತು 8ನೇ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಇದು ಶೂನ್ಯತೆ (T) = ಶೂನ್ಯತೆ (A) = n–ಸ್ಥಾನ (A) = n–ಸ್ಥಾನ (T) ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. A ಮತ್ತು Tಗಳ ಹೆಚ್ಚಿನ ಜಾಗರೂಕ ಪರೀಕ್ಷೆಯು ಇದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನದನ್ನು ಹೊರಗೆಡಹುತ್ತದೆ. $X^1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, X^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, X^n = (0, 0, \ldots, 0, 1,)$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ A ಯ ನೀಟಸಾಲುಗಳು $TX^1, TX^2, \ldots, TX^n$ ಸದಿಶ ಗಳಾಗಿವೆ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ಯು R^n ಅನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದರಿಂದ (24) ರಿಂದ T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು $\{TX^1, TX^2, \ldots, TX^n\}$ ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತದೆಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ A ಯ ನೀಟಸಾಲುಗಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಗಳ ಗಣವು, A ಯ ನೀಟಸಾಲಿನ ಅವಕಾಶವಾಗಿದೆ. ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(28) ಸ್ಥಾನ (A) = A ಯ ನೀಟಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಆಯಾಮ. A ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಆಯಾಮವನ್ನು ಅನೇಕ ಸಲ **ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ** ಸ್ಥಾನ ಎಂದು ಮತ್ತು A ಯ ನೀಟಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಆಯಾಮವನ್ನು ಅನೇಕ ಸಲ **ನೀಟಸಾಲಿನ** ಸ್ಥಾನ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವೆರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮವೆಂದು (28) ಹೇಳುತ್ತದೆ.

R^n ಯಿಂದ R^m ಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು T ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಹೇಳಿಕೆ (28) ಒಂದು ಅನುಕೂಲ ಸಾಧನವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಕೇವಲ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಂಕುಚನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅದರ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ನಾವು T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇಚ್ಛಿಸಬಹುದು. ನಾವು ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ? ನಾವು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಒಂದು ನೀಟಸಾಲಿನ ಸಂಕುಚನೆ ಮಾಡಿದ ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ರೂಪವನ್ನು ಪಡೆಯುವವರೆವಿಗೂ ನೀಟಸಾಲನ್ನು ಸಂಕುಚಿಸಬಹುದು. (ನೀಟಸಾಲಿನ ಸಂಕುಚನೆಯು ಮತ್ತು ನೀಟಸಾಲು ಸಂಕುಚಿಸಿದ ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ರೂಪ ಇವುಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಂಕುಚನೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದವುಗಳಿಗೆ ಸದೃಶವಾಗಿವೆ.) ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. T ಯ ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರ ವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ? ಇದನ್ನು ಈ ಮೊದಲು ಪ್ರಮೇಯ 6 ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. T ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಮಾತೃಕೆ

ಯನ್ನು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಂಕುಚನೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಭಾಗ 3 ರ (38) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ $\{X^1, X^2, \ldots X^{n-r}\}$ ಅನ್ನು ಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಪ್ರಮೇಯ 8 ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ. ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಂಕುಚನೆಯಾದ ಮೇಲೆ ಉಳಿಯುವ ಚರಾಂಕಗಳು $X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{kr}$ ಗಳಾಗಿರಲಿ. (ಪ್ರಮೇಯ 6 ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೋಡಿ.) ತನ್ನ K_j ನೇ ಘಟಕವು 1 ಆಗಿರುವ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಘಟಕಗಳು 0 ಆಗಿರುವ ಸದಿಶ $Z^j, j = 1, 2, \ldots, Y$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

(39) $\{X^1, X^2, \ldots, X^{n-r}, Z^1, Z^2, \ldots, Z^r\}$ ಯು R^n ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ತೋರಿಸುವುದು ಸುಲಭ. ಪ್ರಮೇಯ 8 ರ ಸಾಧನೆಯ ಪ್ರಕಾರ $\{TZ^1, TZ^2, \ldots, TZ^r,\}$ ಯು T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಧಾನದ ಅನುಕೂಲವೇನೆಂದರೆ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಂಕುಚನೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ನಾನಾ ಬೋಧಪ್ರದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ದೊರಕಿಸಬಹುದು. ಈ ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ, T ಯ ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಮತ್ತು T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೊಂದು ಆಧಾರವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಮುಂದಿನ ಫಲಿತಾಂಶವು ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು ಒಂದು ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ, ಅದು ಬೀರುವ ಪ್ರಭಾವದಿಂದಲೇ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಆಶ್ಚರ್ಯಕರವಾಗಿರಬಾರದು. ಫಲಿತಾಂಶ (22) R^n ನಿಂದ R^m ಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು ಒಂದು ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಅದು ಬೀರುವ ಪ್ರಭಾವದಿಂದಲೇ ಎಂದರೆ (21) ರಿಂದ, ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ನಮ್ಮ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದಕ್ಕೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಸಮಾನತೆಯ ಒಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ. ಎರಡು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು ಅವು ಒಂದೇ ಪ್ರಭಾವ ಕ್ಷೇತ್ರವನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಪ್ರಭಾವವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅವನ್ನು **ಸಮಾನ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಕೇವಲ T ಮತ್ತು S ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು V ಎನ್ನೋಣ, ಪ್ರಭಾವ ಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ X ಗಳಿಗೆ $TX = SX$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $T = S$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 9. V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಆಗಿರಲಿ W

ನಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಯಾವುದೇ ಗಣವು $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $TX^i = Y^i, i = 1, 2, \ldots, n$ ಆಗಿರುವಂತೆ ನಿಖರವಾಗಿ Vಯಿಂದ Wಗೆ **ಒಂದು** ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆ ಇದೆ.

ಸಾಧನೆ : T ಗೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ನೀಡಲಾಗುತ್ತದೆ. V ಯಲ್ಲಿ X ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $X = c_1X^1 + c_2X^2 + \cdots + c_nX^n$. V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ X ಗೆ ಈ ಪದೋಕ್ತಿಯು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ. [ಭಾಗ 3 ರಲ್ಲಿ (24) ರ ಮೇಲಿನ ಟೀಕೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿ] TX ಅನ್ನು $c_1Y^1 + c_2Y^2 + \cdots + c_nY^n$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ ನಾವು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸದಿಶ Xಗೆ, Wನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಸದಿಶ TXಅನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸುವುದರಿಂದ, T ಯು Vಯಿಂದ Wಗೆ ಆದ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ. T ಯು (12) ನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆಂಬುದು ಸುಲಭ. $X^i = 0 \cdot X^n + 0 \cdot X^2 + \cdots + 0. X^{i-1} + 1. X^i + 0. X^{i+1} + \cdots + 0. X^n$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $1 \leq i \leq n$ ಗೆ $TX^i = Y^i$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು T ಯ ಅಸ್ತಿತ್ವವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ.

ಈಗ $SX^i = Y^i, i = 1, 2, \ldots, n$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯಿಂದ Wಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು S ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $X = c_1X^1 + c_2X^2 + \cdots + c_nX^n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $TX = c_1Y^1 + c_2Y^2 + \cdots + c_nY^n = c_1SX^1 + c_2SX^2 + \cdots + c_nSX^n = S(c_1X^1 + c_2X^2 + \cdots + c_n X^n) = SX$. ಆದ್ದರಿಂದ $S = T$. $Q.E.D.$

ಟೀಕೆಗಳು : ಪ್ರಮೇಯ 9 ರ ಸಾಧನೆಯ ಮಹತ್ವದ ಅಂಶವು ಆಧಾರ $\{X^1, X^2, \cdots, X^n\}$ ನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ X ಅನ್ನು ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಇದೆ. ಈ ಪ್ರಮೇಯವು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಈ ಸಂಗತಿಯ ಪುನರ್ ನಿರೂಪಣೆ ಮಾತ್ರ ಆಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಭಾಗ 6 ರಲ್ಲಿ ಇನ್ನಷ್ಟು ಪರಿಶೋಧಿಸಲಾಗುವುದು.

ಒಂದು ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ T ಯ ಪ್ರಭಾವವನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಸಾಕೆಂದು ಪ್ರಮೇಯ 9 ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದ V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಆಗಿರುವಾಗ, $TX^i = Y^i, i = 1, 2, \ldots, n$ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ T ಯು **ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ $TX^i = Y^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ಆಗಿರುವಂತೆ, V ಯಿಂದ W ಗೆ T ಯು ಆ ಏಕೈಕ ರೇಖೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿರುವಂತೆ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ಸದಿಶಗಳ ಮೇಲೆ T ಯು ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎಂಬುದೇ ಇದರ ಅರ್ಥ.

ಹೀಗೆ (2) ರ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣ ಗಳಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದೆ.

$$T(1,0)=(2,1),\ T(0,1)=(1,-1)$$

R^2ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{(3, 2), (0, 1)\}$ ಕೂಡ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ T ಯು $T(3, 2) = (8, 1)$ ಮತ್ತು $T(0, 1) = (1, -1)$ ಇಂದಲೂ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. (17) ರ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

$T(1, 0, 0) = (2, 1)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ ಮತ್ತು $T(0, 0, 1) = (-1, -1)$. ನಾವು (8) ರ ಕಡೆ ನೋಡೋಣ. $\{V_0, V_1, V_2\}$ ಯು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವಂತೆ V_1 ಮತ್ತು V_2 ಗಳು ಆಯ್ಕೆಯಾಗಲಿ. ಆಗ P ಯು ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ,

$$P(V_0)=V_0,\ P(V_1)=(P(V_2)=0.$$

ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ನಾನಾ ದಾರಿಗಳನ್ನು ಈಗ ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ವಿವರಿಸಬೇಕಾದ ಸಮಷ್ಟಿಗಳು ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಾಗಿದ್ದರೆ (21) ಅಥವಾ (22)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಪ್ರಮೇಯ 9 ನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಒಂದು ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಪ್ರಭಾವವನ್ನು ನಿಯಮಿಸಬಹುದು. ಅನೇಕ ಸಲ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ವಿವರಣೆಗಳನ್ನು ಸಹ ಕೊಡಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೋಡೋಣ.

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಕೊನೆಯ ಕಾರ್ಯವೆಂದರೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಮೇಲೆ ನಿರ್ವಹಿಸಬಹುದಾದ ಕೆಲವು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ನಾವು ನೋಡುವಂತೆ ಸರಿಯಾದ ಕಟ್ಟುಪಾಡಿನಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನು 'ಕೂಡಬಹುದು', 'ಗುಣಿಸಬಹುದು', 'ಅದಿಶ ಗುಣಿಸಬಹುದು' ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿ 'ಭಾಗಿಸಲೂ'ಬಹುದು. ಈ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಮುಖವಾದುದು ಗುಣಾಕಾರ. ಉಳಿದವು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಲು ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಾಥಮಿಕವೂ ಮತ್ತು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಧಿವಿದಿತ (ನಿಯಮಿತ) ಸಾಧನಗಳೂ ಆಗಿವೆ.

V ಯಿಂದ W ಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು S ಮತ್ತು T ಆಗಿರಲಿ. ಒಂದು

ಸದಿಶ X ಗೆ S ಅನ್ನು ಮತ್ತು T ಯನ್ನೂ ಸಹ ಒಂದು ಸದಿಶ X ಗೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸಿರಿ. ಆಗ SX ಮತ್ತು TX ಎರಡೂ W ನಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವೆರಡೂ ಸದಿಶಗಳನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿರಿ : $SX + TX$ ಇದೂ ಕೂಡ W ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶ X, S ಮತ್ತು T ಗಳಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ V ಯಿಂದ W ಗೆ, ಅಂದರೆ X ನ್ನು $SX+TX$ ನೊಳಕ್ಕೆ ಕಳುಹಿಸುವ ಒಂದು ಹೊಸ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಸೂತ್ರವಿಧಿಯನ್ನು '$S+T$' ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು S ಮತ್ತು T ಗಳ **ಮೊತ್ತ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆಗ $S+T$ ಯ ಸೂತ್ರವಿಧಿಯು ಇಂತಿವೆ :

(30) $(S+T)X = SX+TX$ ಇದು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ.

$S+T$ ಪರಿವರ್ತನೆಯು ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ, ಏಕೆಂದರೆ,

$$\begin{aligned}(S+T)(aX+bY) &= S(aX+bY)+T(aX+bY)\\ &= aSX+bSY+aTX+bTY)\\ &= a(SX+TX)+b(SY+TY)\\ &= a(S+T)X+b(S+T)Y.\end{aligned}$$

ಇದೇ (ಸದೃಶ) ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಒಂದು ಅದಿಶ ಗುಣಕವನ್ನು ವಿವರಿಸಬಹುದು. V ಯಿಂದ W ಗೆ T ಯು ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು a ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. V ಯಲ್ಲಿ X ಇರಲಿ. ಆಗ W ನಲ್ಲಿ TX ಇದೆ. ಹಾಗೆಯೇ aTX ಇದೆ. aTX ಸದಿಶವು X, T ಮತ್ತು a ಗಳಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ನಾವು ಈ ಹೊಸ ಸೂತ್ರವಿಧಿಯನ್ನು '$a\,T$' ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಇದನ್ನು **a ಯಿಂದ T ಯ ಅದಿಶಗುಣಕ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ನಿಯಮಿತವಾಗಿ aT ಯು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವಿಧಿಯಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ T ಯಿಂದ W ಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ.

(31) $(aT)X = aTX$ ಇದು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ

aT ಯ ರೇಖಾತ್ಮಕತೆಯು ಸಾಧಿಸಲು ಸುಲಭವಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. T ಯು (2) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ R^2 ಗೆ, R^2 ನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಮುಂದೆ ಇರುವುದರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ R^2 ಗೆ R^2 ನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು S ಆಗಿರಲಿ.

(32) $$S(x,y) = (3x+2y, -6x+y).$$

ಆಗ $S+T$ ಯು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

(33) $$(S+T)(x,y)=(5x+3y, -5x),$$

ಮತ್ತು aS ಮತ್ತು aT ಗಳು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

(34) $$\begin{aligned}(aS)(x,y) &= (3ax+2ay, -6ax+ay),\\ (aT)(x,y) &= (2ax+ay, ax-ay).\end{aligned}$$

Sನ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$S+T$ ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ,

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

S ಮತ್ತು T ಗಳ ಮಾತೃಕೆಗಳಿಂದ, ಒಂದು ರೀತಿಯ ಸಂಕಲನೆಯಿಂದ ಇದನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳು ಕೆಳಗಿರುವಂತಿವೆ,

$A=(A_{ij})$ ಮತ್ತು $B=(B_{ij})$ ಗಳು $m\times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ,

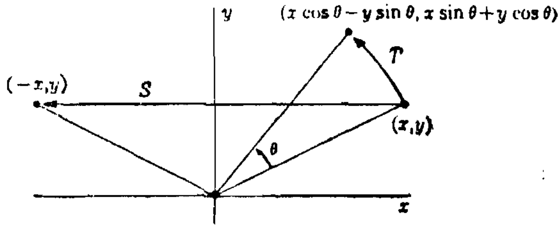
ಆಗ $A+B$ ಯು $m\times n$ ಮಾತೃಕೆ $(A_{ij}+B_{ij})$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ; ಅಂದರೆ,

(35) $$A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1n}+B_{1n} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2n}+B_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{m1}+B_{m1} & A_{m2}+B_{m2} & \cdots & A_{mn}+B_{mn} \end{bmatrix}.$$

ಅಲ್ಲದೆ, aA ಯು $m \times n$ ಮಾತೃಕೆ (aA_{ij}) ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ; ಅಂದರೆ,

$$(36) \qquad aA = \begin{bmatrix} aA_{11} & aA_{12} & \cdots & aA_{1n} \\ aA_{21} & aA_{22} & \cdots & aA_{2n} \\ \vdots & & & \\ aA_{m1} & aA_{m2} & \cdots & aA_{mn} \end{bmatrix}.$$

ಇವು S ಮತ್ತು T ಗಳು R^m ಗೆ R^n ನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು A ಯು S ನ ಮತ್ತು B ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $A+B$ ಯು $S+T$ ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವಂತಹ ಮತ್ತು aA ಯು aS ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವಂತಹ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ-4

ಈಗ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಒಂದು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, (0, 0) ಸುತ್ತ θ ಕೋನದಷ್ಟು ಒಂದು T ಆವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು Y ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ R^2 ನ ಒಂದು ಪ್ರತಿಫಲನವು S ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಕೆಳಗಿನಂತೆ R^2 ಗೆ R^2 ನ ಎರಡು ಹೊಸ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಬಹುದು. θ ಕೋನದಷ್ಟು ತಿರುಗಿಸಿ. T ಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ, ಅನಂತರ S ಅನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ, Y-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಫಲಿಸಿ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ತಿರುಗುಮುರುಗು ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೂ ನಿರ್ವಹಿಸಬಹುದು. ಈ ಹೊಸ 'ಸಂಘಟಿತ' ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು ಹೇಗೆ ಕಾಣುತ್ತವೆಂದು ನೋಡೋಣ. (ಚಿತ್ರ-4 ನೋಡಿ)

$$(37) \qquad T(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta,\ x \sin\theta + y \cos\theta)$$

$$(38) \qquad S(x, y) = (-x, y)$$

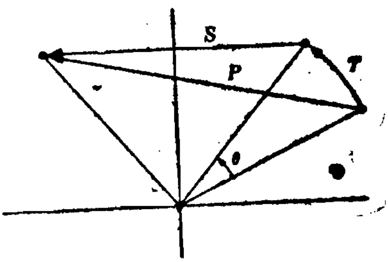
ಮೊದಲು Tಯೊಡನೆ ಅನಂತರ Sನೊಡನೆ ಪರಿಕರ್ಮಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಜೋಡಿಯು Tಯಿಂದ $(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ ದೊಳಕ್ಕೆ ಕಳುಹಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಈ ಬಿಂದುವು ಅನಂತರ S ನಿಂದ $(-x\cos\theta + y\sin\theta, x\sin\theta\ \ y\cos\theta)$ ದೊಳಕ್ಕೆ ಕಳುಹಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. (x, y) ಯನ್ನು $(-x\cos\theta + y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ ದೊಳಕ್ಕೆ ಕಳುಹಿಸುವ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದನ್ನು Pಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಿದರೆ,

(39) $P(x, y) = (-x\cos\theta + y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

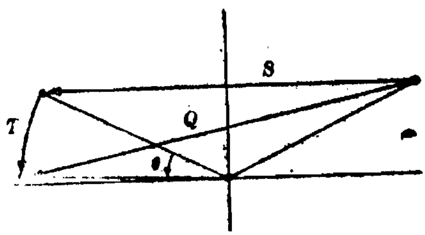
ಈಗ Sನೊಡನೆ ಅನಂತರ Tಯೊಡನೆ ಪರಿಕರ್ಮಿಸುತ್ತೇವೆ. (x, y) ಜೋಡಿಯು S ನಿಂದ $(-x, y)$ ಯೊಳಕ್ಕೆ ಕಳುಹಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಈ ಬಿಂದುವು T ಯಿಂದ $(-x\cos\theta - y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$ ದೊಳಕ್ಕೆ ಕಳುಹಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. $(x, y$ ಯನ್ನು $(x\cos\theta - y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$ ದೊಳಕ್ಕೆ ಕಳುಹಿಸುವ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದನ್ನು Q ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಿದಲ್ಲಿ

(40) $Q(x, y) = (-x\cos\theta - y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

5 ಮತ್ತು 6 ಚಿತ್ರಗಳು S, T, P ಮತ್ತು Q ಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ. P ಮತ್ತು Q ಗಳು S ಮತ್ತು Tಗೆ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಇದನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸಲು ನಾವು '$P = ST$' ಮತ್ತು



ಚಿತ್ರ–5



ಚಿತ್ರ–6

'$Q = TS$' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. $P = ST$ ಪದೋಕ್ತಿಯು, Pಯು T ಯಿಂದ ನಂತರ S ಸಿಂದ ಪರಿಕರ್ಮಿಸುವುಸರ ಫಲಿತಾಂಶವೆಂದು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ;

$Q = TS$ ಪದೋಕ್ತಿಯು S ನಿಂದ, ನಂತರ T ಯಿಂದ ಪರಿಕರ್ಮಿಸುವುದರ ಫಲಿತಾಂಶವು Q ಎಂದು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ $Q \neq P$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ (θ ವು π ನ ಒಂದು ಅನುಕೂಲಜ ಗುಣಕವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ).

ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಗಣನೆಗಳ ವಿಶೇಷ ಪ್ರಸಂಗಗಳಾಗಿವೆ. V ಯಿಂದ Wಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು T ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು W ಯಿಂದ Vಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು S ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ST ಯು V ಯಿಂದ U ಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ,

(41) $(ST)\,X = S\,(TX)$ ಇದು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ

(41) ಸೂತ್ರವಿಧಿಯನ್ನು ವ್ಯಾಖಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಇದು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು X ಗೆ V ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಸದಿಶವನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸುವ ಸೂತ್ರ ವಿಧಿಯಾಗಿದೆ. ಮೊದಲು T ಯನ್ನು X ಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ W ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು TX ಸದಿಶವನ್ನು ಪಡೆದು TXಗೆ S ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ U ನಲ್ಲಿಯು ಸದಿಶವನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗುವುದು. U ಗೆ V ಯ ಪರಿವರ್ತನೆ ST ಇದನ್ನು S ಮತ್ತು T ಗಳ **ಗುಣಲಬ್ಧವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. (39) ಮತ್ತು (40) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, $V = W = U = R^2$ ಆಗಿರುವ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿಯೂ ಕೂಡ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಕ್ರಮವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ.

U ಗೆ V ಯ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು ST ಆಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಗಣಿಸಿರಿ: $(ST)\,(aX+bY)$ ಯು (41) ರಿಂದ $S\,(T\,(aX+bY))$ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ (12) ರಿಂದ $T\,(aX+bY) = aTX+bTY$. ಹೀಗೆ $S\,(T(aX+bY)) = S(aTX+bTY)$. ಪುನಃ (12) ರಿಂದ $S(aTX+bTY) = aS\,(TX)+bS\,(TY)$ ಸೂತ್ರ ವಿಧಿ (41) ರಿಂದ $aS\,(TX)+bS(TY) = a\,(ST)X+b\,(ST)\,Y$; ಇವನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ,

$$(ST)\,(aX+bY) = a(ST)X+b\,(ST)\,Y;$$

ಅಂದರೆ, ST ಯು (12)ನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ.

(2) ರಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಿ T ಮತ್ತು (32) ರಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಿ S ಆಗಿರಲಿ. ಮುಂದಿನದರಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡುವ R^2 ಮೇಲಿನ ST ಮತ್ತು TS ಗಳು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಾಗಿವೆ.

$$ST(x, y) = S(T(x, y)) = S(2x+y, x-y)$$
$$= (3(2x+y) + 2(x-y), -6(2x+y) + (x-y)) \tag{42}$$
$$= (8x+y, -11x-7y),$$

$$TS(x, y) = T(S(x, y)) = T(3x+2y, -6x+y)$$
$$= (2(3x+2y) + (-6x+y), (3x+2y) - (-6x+y)) \tag{43}$$
$$= (5y, 9x+y).$$

ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ, $ST \neq TS$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಗೆ ಇದು ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿದೆ.

ಇತರ ಕೆಲವು ಸೂತ್ರವಿಧಿಗಳು ಸತ್ಯವಾಗಿವೆ. V_1 ನಿಂದ V_2ಗೆ Tಯು ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು V_3ಗೆ V_2ನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು S ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು V_4ಗೆ V_3 ಯ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು R ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ

$$(RS)T = R(ST). \tag{44}$$

V_2ಗೆ V_1ನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು S ಮತ್ತು T ಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು V_3ಗೆ V_2ನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು R ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ,

$$R(S+T) = RS + RT. \tag{45}$$

T ಯು V_2ಗೆ V_1ನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು V_3ಗೆ V_2ನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು S ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು a ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ

$$a(ST) = (aS)T = S(aT). \tag{46}$$

ಪರಿವರ್ತನಾ ಗುಣಾಕಾರದ ಸಹವರ್ತನೆಯ ನಿಯಮ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ (44)ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸೋಣ. V_2ಯನ್ನು V_3ಗೆ S ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು V_3 ಯನ್ನು V_4ಗೆ R ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದರಿಂದ V_2ಯನ್ನು V_4ಗೆ RS ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $(RS)T$ಯು V_4ಗೆ V_1 ಅನ್ನು ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ. STಯು V_1 ಅನ್ನು V_3ಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದರಿಂದ $R(ST)$ ಯು V_1ನ್ನು V_4ಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ.

$(RS)T$ಯ ಪ್ರಭಾವ ಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು $R(ST)$ಯ ಪ್ರಭಾವ ಕ್ಷೇತ್ರ ಒಂದೇ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. V_1ನಲ್ಲಿ X ಇರಲಿ. ಆಗ $((RS)T)X = (RS)(TX) = R(S(TX)) = R((ST)X) = (R(ST))X$; ಅಂದರೆ, $R(ST) = (RS)T$ (ಇದು ಪ್ರಕ್ಷೇಪ ಚಿನ್ಹೆಗಳನ್ನು ಇರಿಸುವಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾತ್ರ) (45) ಮತ್ತು (46)ನೇ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಇನ್ನೂ ಸುಲಭತರವಾಗಿವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಮುಖ ಪ್ರಸಂಗವು (41)ರಲ್ಲಿ $T = W = U$ ಪ್ರಸಂಗವಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ S ಮತ್ತು Tಗಳು Vಯ ಮೇಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ST ಮತ್ತು TSಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುತ್ತವೆ. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ $ST \neq TS$ ಮತ್ತು ಇತರ ವಿಲಕ್ಷಣ ಸಂಗತಿಗಳೂ ಸಂಭವಿಸಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗುವುದು.

Tಯು, Vಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ TT, $(TT)T$, (TT) ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಬಹುದು. ಇವೆಲ್ಲವೂ Vಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು. ನಾವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಈ ಅಂಕಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. $T^2 = TT$, $T^3 = (TT)T$, ಇತ್ಯಾದಿ. $(TT)T = T(TT)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಅಂಕನದಿಂದ ಯಾವುದೇ ಸಂದಿಗ್ಧತೆಯೂ ಪರಿಣಮಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಇವುಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಇಂತಿವೆ :

(47) $T^2(x, y) = T(2x+y, x-y) = (2(2x+y)+(x-y), (2x+y)-(x-y)) = (5x+y, x)$ ಇದು (2) ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಂತೆ Tಯು ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

(48) Tಯು (37) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ T^2 2θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ T^3 3θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ, ಇತ್ಯಾದಿ.

(49) (38) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ S ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $S^2 = IR^2$.

(48) ಮತ್ತು (49) ನೇ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಸ್ಫುಟವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು (37) ಮತ್ತು (38) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು.

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಸಂಕಲನವು ಮಾತೃಕೆ ಸಂಕಲನಕ್ಕೆ [(35) ನೋಡಿ] ದಾರಿ ಮಾಡುವಂತೆಯೇ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ದಾರಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಕೇವಲ 2×2 ಪ್ರಸಂಗವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಇಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಭಾಗ 6 ಕ್ಕೆ ಬಿಡುತ್ತೇವೆ.

S ಮತ್ತು T ಗಳು R^2 ನ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಾಗಿರಲಿ.

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ಇದು}$$

Sನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ, ಮತ್ತು

$$B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ಇದು} \; .$$

T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ ಆಗ,

(50) $$S(x, y)=(A_{11}x+A_{12}y,\ A_{21}x+A_{22}y),$$

(51) $$T(x, y)=(B_{11}x+B_{12}y,\ B_{21}x+B_{22}y),$$

ಮತ್ತು

(52)
$$\begin{aligned}(ST)(x,y) &= S(T(x,y)) = S(B_{11}x+B_{12}y,\ B_{21}x+B_{22}y), \\ &= (A_{11}(B_{11}x+B_{12}y)+A_{12}(B_{21}x+B_{22}y), \\ &= (\ A_{21}(B_{11}x+B_{12}y)+A_{22}(B_{21}x+B_{22}y)\ ) \\ &= (\ (A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21})x+(A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22})y, \\ &= (\ (A_{21}B_{21}+A_{22}B_{11})x+(A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22})y).\end{aligned}$$

ST ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ,

(53) $$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

ಇದನ್ನು A ಮತ್ತು Bಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು AB ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ. (ಇಲ್ಲಿ ಮತ್ತೆ A ಮತ್ತು B ಗಳ ಕ್ರಮವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ) AB ಯ i ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮತ್ತು j ನೇ ನೀಟಸಾಲಿನ ದಾಖಲಾತಿ

ಯನ್ನು, Aಯ iನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ದಾಖಲಾತಿಗಳನ್ನು Bಯ jನೇ ನೀಟಸಾಲಿನ ವಾದಿ ದಾಖಲಾತಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಕೊಡುವುದರಿಂದ ಇವನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಇದನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸುತ್ತವೆ.

(54) $$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.3+1.(-6) & 2.2+1.1 \\ 1.3+(-1).(-6) & 1.2+(-1).1 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 9 & 1 \end{bmatrix},$$

(55) $$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3.2+2.1 & 3.1+2.(-1) \\ (-6).2+1.1 & (-6).1+1.(-1) \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -11 & -7 \end{bmatrix},$$

(56) $$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} \cos^2\theta-\sin^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta+\cos^2\theta \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix},$$

(57) $$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ಇವು ಕ್ರಮವಾಗಿ (43), (42), (48) ಮತ್ತು (49) ರ ಮಾತೃಕೆ ಸದೃಶಗಳಾಗಿವೆ. ಓದುಗನು 2×2 ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಶೀಘ್ರವಾಗಿ ಗಣಿಸಲು ಶಕ್ತನಾಗಿರಬೇಕಾದುದು ಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಟೀಕೆಗಳು : (30) ಮತ್ತು (31) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಅದಿಶ ಗುಣಾಕಾರಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ Vಯಿಂದ Wಗೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮುಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಅದಿಶ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಭಾಗ 3 ರ (10) ನೇ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ (35) ಮತ್ತು (36) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳೊಡನೆ $m\times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮುಷ್ಟಿಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತದೆ. $V=W$ ಅಥವಾ $m=n$ ಆಗಿರುವ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಈ ಸಮುಷ್ಟಿಗಳು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಅಂಥ ಸದಿಶಗಳೂ ಸಮುಷ್ಟಿಗಳೂ ಬೀಜಗಣಿತಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗಿವೆ.

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಮುಂದುವರಿದ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಬಹು ಭಾಗವು ಈ ಬೀಜಗಣಿತಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ. ಸಂದರ್ಭಾನುಸಾರ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಟೀಕೆಗಳಿಗೆ ಹೊರತಾಗಿ, ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಈ ಸಮಷ್ಟಿಗಳನ್ನು ಸಂಸ್ಕರಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

R^n ಇದು R^m ಆಗುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು T ಯನ್ನು ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತೋರಿಸಿಲ್ಲವೆಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಇದು ಪ್ರಮೇಯ 9 ರಿಂದ ಮತ್ತು (20) ಮತ್ತು (21) ರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗೆ ದಾರಿ ಮಾಡುತ್ತದೆಂದೂ ತೋರಿಸಿಲ್ಲ. ಇದು ಸುಲಭ, ಏಕೆಂದರೆ A ಯು ಒಂದು $m \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ A ಯು ತನ್ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವಂತಹ, R^n ನಿಂದ R^m ಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು (22) ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. ಕೆಳಗಿರುವುದರಲ್ಲಿ R^3 ಯಿಂದ R^2 ಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವುವು ಯಾವುವು ?

(a) $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$

(b) $T(x, y, z) = (|x|, y - z)$

(c) $T(x, y, z) = (x + 1, y + z)$

(d) $T(x, y, z) = (0, z)$

(e) $T(x, y, z) = (x + y/z, z)$

(f) $T(x, y, z) = (3x - y, y, -z, 3x - 2y + z)$

(g) $T(x, y, z) = (3x - 2y + z, x - 3y - 2z)$

2. (2) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಕೆಳಗಿರುವ R^3 ನ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ,

(a) (0, 0, 0) ವನ್ನು ನಿಶ್ಚಲವಾಗಿ ಬಿಟ್ಟು, (0, 0, 0) ಮತ್ತು (1, 0, 0) ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸುತ್ತ, $\pi/3$ ಕೋನದಷ್ಟು, ಒಂದು ಆವರ್ತನೆ.

(b) (2, 0, 3), (1, 0, 2) ಮತ್ತು (0, 0, 0) ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪ್ರತಿಫಲನ.

(c) (b) ಸಮತಲಕ್ಕೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನ.

(d) ಮಾನಕದ ಒಂದು ಬದಲಾವಣೆ; ಅಂದರೆ, $a>0$, $b>0$ ಮತ್ತು $c>0$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ (x, y, z) ಯು (ax, by, cz) ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

3. ಕೆಳಗಿರುವುದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ R^3 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ:

(a) $T(x, y, z) = (x-y, z+y, x)$

(b) $T(x, y, z) = (x, y, 0)$

(c) $T(x, y, z) = (x+y, -x-y, z)$

(d) $T(x, y, z) = (y, -x, -z)$

4. (a) ಅಭ್ಯಾಸ 2 ರ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) ಅಭ್ಯಾಸ 3 ರ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಕೆಳಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು R^n ನಿಂದ R^m ಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಾತೃಕೆಗೂ n ಮತ್ತು m ಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ ಮತ್ತು (22) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ,

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

6. V ಯು $\leq n$ ಸ್ತರದ ಬಹುಪದಿಗಳ ಅವಕಾಶವಾಗಿರಲಿ ಭಿನ್ನ ಕಲನವು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಅಭ್ಯಾಸ 3 ರ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಶೂನ್ಯ ಆಕಾಶವನ್ನೂ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನೂ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ವಿವರಿಸಿರಿ.

8. ಕೆಳಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನೂ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನೂ ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

9. ಅಭ್ಯಾಸ 8 ರ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೂ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನೂ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯ ಆಕಾಶಕ್ಕೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಕೆಳಗಿರುವುದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ R^2 ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು T ಯಾಗಿರಲಿ. (22)ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ T ಯನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು $T(1, 0)$ಯನ್ನು ಗಣಿಸಿರಿ:

(a) $T(3, 1) = (1, 2)$, $T(-1, 0) = (1, 1)$

(b) $T(1, 1) = (2, 1)$, $T(-1, 1) = (6, 3)$

11. $dim\ V > dim\ W$ ಆಗಿರಲಿ. V ಯಿಂದ Wಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು T ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು W ಯಿಂದ V ಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು S ಆಗಿರಲಿ.

(a) $TX = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯಲ್ಲಿ $X \neq 0$ ಸದಿಶ ಒಂದು ಇದೆ ಯೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) $SY = X$ ಇರಲು W ವಲ್ಲಿ Y ಪರಿಹಾರ ಹೊಂದಿಲ್ಲದಿರುವಂತೆ V ಯಲ್ಲಿ X ಸದಿಶ ಇದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

12. $S(x, y, z) = (3x-y, 0, z)$ ನಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ R^3

ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು S ಆಗಿರಲಿ. ಅಭ್ಯಾಸ 3 ರ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ST, TS, $S+T$ ಮತ್ತು $3S^2-2T^3$ ಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.

13. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಗಣಿಸಿ.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$

(e) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

14. ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ R^3 ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ,

(a) $T\neq 0, T^2\neq 0, T^3=0$

(b) $T\neq 0, S\neq 0, ST\neq 0, TS=0$

(c) $T^n\neq 0$ ಯಾವುದೇ $n>1$ ಗೆ

(d) $S+T=S-T$

(e) $S^2=T^2$ ಮತ್ತು $S\neq T$

(f) $(S-2I)^2=0$ ಆದರೂ $S\neq 2I$

(g) $ST^2=T^2S$, ಆದರೂ $ST\neq TS$

(h) $T^2=I$ ಮತ್ತು $T\neq I$

15. (a) (10) ಮತ್ತು (11) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ.

(b) (37) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ.

(c) P ಮತ್ತು Q ಗಳು (39) ಮತ್ತು (40) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಂತೆ ಇದ್ದರೆ, ಕೇವಲ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ nಗೆ $\theta=n\pi$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $P=Q$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(d) ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಸಾಮ್ಯಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ T^2 ಮತ್ತು T^3 ಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸುವುದರಿಂದ (48) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.

16. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯನ್ನು $Tf(t)=\int_0^t f(u)\,du$ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(a) $0 \leq u \leq 1$ ಗಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಸಮಷ್ಟಿ.

(b) ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿ.

17. (a) ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯನ್ನು ಭಿನ್ನಕಲನವು ವಿವರಿಸುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) ಅಭ್ಯಾಸ 16 (a) ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯನ್ನು ಭಿನ್ನಕಲನವು ವಿವರಿಸುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ತೋರಿಸಿ (ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಅನೇಕ ಅತ್ಯಂತ ಗಹನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಈ ಸಂಗತಿಯಿಂದಲೇ ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ.)

18. (a) (13), ಇದು (12) ಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾರ್ಥವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) aT ಯು (31) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವಾಗ, aT ಯು ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(c) (45) ಮತ್ತು (46) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

19. R^2 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು T ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ,

(a) $T \neq 0$ ಮತ್ತು $T^2=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $TX_1 = X^2$ ಮತ್ತು $TX^2=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ R^2ಗೆ $\{X^1, X^2\}$ ಎಂಬ ಒಂದು ಆಧಾರವಿದೆ.

(b) $T \neq 0$, $T \neq I$ ಮತ್ತು $T^2 = T$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $TX^1 = X^1$ ಮತ್ತು $TX^2 = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ R^2ಗೆ $\{X^1, X^2\}$ ಎಂಬ ಒಂದು ಆಧಾರವಿದೆ.

(c) ಸ್ಥಾನ$(T) = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $TX^1 = 0$ ಮತ್ತು $TX^2 \neq 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ R^2ಗೆ $\{X^1, X^2\}$ ಎಂಬ ಒಂದು ಆಧಾರವಿದೆ.

20. (a) T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯೂ T ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯೂ ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $dim\ V$ ಯು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯದಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. (V ಯು ಸಾಂತ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಯಾಗಿದೆ.)

(b) V ಯಿಂದ Wಗೆ T ಯು ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆ ಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು W ಯಿಂದ Vಗೆ S ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ $dtm\ V > dtm\ W$ ಎಂದು ಇಟ್ಟು ಕೊಳ್ಳೋಣ. ಸ್ಥಾನ $(ST) < dim\ V$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

21. V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು V ಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು S ಮತ್ತು T ಆಗಿರಲಿ.

(a) ಸ್ಥಾನ $(ST) \leq (S)$ ನ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ಸ್ಥಾನ (T) ಯ ಕನಿಷ್ಠತೆ.

(b) $dim\ V =$ ಸ್ಥಾನ (S) ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಸ್ಥಾನ $(ST) =$ ಸ್ಥಾನ (T)

(c) ಸ್ಥಾನ $(T) = dim\ V$ ಆಗಿರುವಾಗ ಸ್ಥಾನ (ST) ಏನು ?

22. (29) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ [ಸೂಚನೆ : n ಸಣ್ಣದಾಗಿರುವಾಗ (29) ರ ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೊಡಿ]

23. T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ.

(a) TX ಮತ್ತು TY ಗಳ ನಡುವಿನ ರೇಖೆಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿರುವಂತೆ X ಮತ್ತು Y ಗಳ ನಡುವಿನ ರೇಖೆಯನ್ನು T ಯು ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತ ದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) TX, TY, TZ ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿರುವಂತೆ X, Y ಮತ್ತು Z ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು T ಯು ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(c) T ಯು ಪೀನಮಧ್ಯಗಣಗಳನ್ನು ಪೀನಮಧ್ಯಗಣಗಳಿಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿರುವಂತೆ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ M ಪೀನಮಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ M ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು ಪೀನಮಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

(d) T ಯು ಧನಾತ್ಮಕ ಶಂಕುಗಳನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕ ಶಂಕುಗಳಿಗೆ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ.

24. T ಯು V ಯ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಿತ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ.

(a) X ಮತ್ತು Y ಗಳ ನಡುವಣ ರೇಖೆಯ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವೇನು ?

(b) X, Y ಮತ್ತು Z ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವೇನು ?

(c) T ಯು ಪೀನಮಧ್ಯಗಣಗಳನ್ನು ಪೀನಮಧ್ಯಗಣಗಳಿಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿರುವಂತೆ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ.

(d) T ಯು ಧನಾತ್ಮಕ ಶಂಕುಗಳನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕ ಶಂಕುಗಳಿಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗುವಂತೆ ಚಿತ್ರಿಸದೆ ಇರಬಹುದೆಂಬುದಕ್ಕೆ R^2 ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

25. R^3 ಗೆ $\{X^1, X^2, X^3\}$ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. $f_1X^1 = 1$, $f_1X^2 = f_1X^3 = 0$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ R^3 ನಿಂದ R ಗೆ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಯು f_1 ಆಗಿರಲಿ, ಹಾಗೆಯೇ $f_2X^2 = f_3X^3 = 1$, $f_2X^1 = f_2X^3 = f_3X^1 = f_3X^2 = 0$ ಯಿಂದ f_2 ಮತ್ತು f_3 ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಡಲಿ. (ಇವನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ 9 ಕೊಡುತ್ತದೆ.) R^3 ನಿಂದ R ಗೆ f ಎನ್ನುವುದು ಯಾವುದೇ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ. $f = (fX^1)f_1 + (fX^2)f_2 + (fX^3)f_3$ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು ಪ್ರಮೇಯ 9ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.

26. (a) (22) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ T ಯು R^3 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿ

ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(d) T ಯು R^3 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು R^3 ನಲ್ಲಿ X ಇರುವಾಗ, TX ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(c) S ಮತ್ತು T ಗಳು R^3 ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು TX ಮತ್ತು SX ಗಳನ್ನು ಗಣಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ನಮಗೆ ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $(ST)X$ ಮತ್ತು $(S+T)X$ ಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಲು ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.

ವಿಶೇಷ ಅಭ್ಯಾಸ

V ಯಿಂದ W ಗೆ ಆದ ಎಲ್ಲಾ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯು $L(V, W)$ ಆಗಿರಲಿ. [(57)ರ ಮೇಲಿನ ಟೀಕೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿ] V ಮತ್ತು W ಗಳು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯುವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $dim\ L(V, W) = dim\ V\ dim\ W$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಸೂಚನೆ: V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{X^1, X^2, \cdots X^n\}$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು W ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{Y^1, Y^2 \ldots Y\}$ ಆಗಿರಲಿ. $E_{ij}(X^i) = Y^j$ ಮತ್ತು $k \neq i$ ಆಗಿದ್ದರೆ $E_{ij}(X^k) = 0$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖಿಸಲ್ಪಡುವ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳಾದ Eij ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಪ್ರಮೇಯ 9ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. $L(V, W)$ ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರ $\{E_{1,1}, E_{1,2}, \cdots E_{1,m}, E_{2,1}, E_{2,2}, \cdots E_{2,m}, \cdots E_{n,1}, \cdots E_{n,2}, E_{n,m}\}$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಲು ಪ್ರಮೇಯ 9 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.

ಭಾಗ 5 ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು

ವಿಶೇಷ ವಿಧಗಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಗುಣಗಳ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಪುಸ್ತಕದ ಹೆಚ್ಚಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಡೆಸಲು ಆಸಕ್ತರಾಗಿರುತ್ತೇವೆ. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯತೆ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತಹ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಅಂತಹ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಒಂದು ವಿಲಕ್ಷಣತೆಯನ್ನು ಪರಿವರ್ತನಾ ಗುಣಾಕಾರದ ಪದ

ಗಳಲ್ಲಿ ದೊರಕಿಸುತ್ತೇವೆ. ಶೂನ್ಯತೆ ಸೊನ್ನೆಯ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು ನಿಕರವಾಗಿ 'ಭಾಗಿಸ' ಬಹುದಾದಂತಹವುಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನೋಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

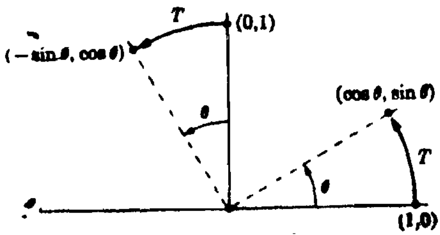
ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಡನೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತ θ ಕೋನದಷ್ಟು T ಯು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಆದ ಒಂದು ಆವರ್ತನೆ R^2 ಇರಲಿ. ಆಗ

(1) $T(x, y) \neq (0, 0)$ ಇದು $(x, y) \neq (0, 0)$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಅಂದರೆ ಶೂನ್ಯತೆ $(T) = 0$.

ಹೀಗೆ ಸ್ಥಾನ $(T) = 2$ ಆಗುವುದರಿಂದ $\{T(1,0),\ T(0, 1)\}$ ಯು R^2 ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ನೇರವಾಗಿಯೂ ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

(2) $T(1, 0) = (\cos\theta, \sin\theta), \quad T(0, 1) = (-\sin\theta, \cos\theta)$

[ಚಿತ್ರ 1 ನೋಡಿ, $0 < \theta < \pi/2$ ಎಂದು (2) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.]



ಚಿತ್ರ-1

ಇಲ್ಲಿನ ಉದ್ದೇಶಗಳಿಗೆ T ಯ ಅತ್ಯಂತ ಮುಖ್ಯಗುಣವೆಂದರೆ ಅದರ ಪ್ರಭಾವ ವನ್ನು 'ರದ್ದು' ಮಾಡಬಹುದು ಎಂಬುದಾಗಿದೆ. $(0,0)$ ರ ಸುತ್ತ $-\theta$ ಕೋನದಷ್ಟು T_1 ಒಂದು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ಕ್ರಮದ ಆವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ ; ಅಂದರೆ θ ಕೋನದಷ್ಟು T_1 ಒಂದು ಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ಕ್ರಮದ ಆವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ. ಆಗ

(3) $T_1 T = T T_1 = I$ ಯು R^2 ಮೇಲಿನ ಸಾಮ್ಯಕ

(1), (2) (3) ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಎಲ್ಲವೂ ಮುಖ್ಯ. ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಒಂದೇ ಪರಿ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬೇರೆ ವಿಧದಲ್ಲಿ ಹೇಳುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಕ್ಷ್ಯ ತಿಳಿಯಲಿದ್ದೇವೆ.

T ಯ ಇತರ ಕೆಲವು ಗುಣಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ಗುಣಧರ್ಮವು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಸ್ಫುಟವಾಗಿದೆ,

(4) T ಯು ಆಯಾಮವನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ; ಅಂದರೆ R^2 ನ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು Tಯು ಕೆಳಗೆ M ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು N ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $dim\ M = dim\ N$.

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ರೇಖೆಗಳು ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿರುವಂತೆ ಚಿತ್ರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ ಯೆಂದು (4) ಹೇಳುತ್ತದೆ.

R^2 ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಇತರ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು S ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $TS = 0$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಎಡಗಡೆಯಲ್ಲಿ T_1 ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ $0 = T_1 0 = T_1(TS) = (T_1T)S = IS = S$.

(5) $TS = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $S = 0$

(4), (5) ಮತ್ತು (6) ಕೂಡ (1), (2) ಮತ್ತು (3) ನಿರೂಪಿಸಿದಂತಹ ಗುಣವನ್ನೇ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ನಾವು ಮುಂದೆ ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. (3) ನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸುವ ಗುಣವೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭವಾದ ಗುಣವಾಗಿರುವುದರಿಂದಲೂ ಮತ್ತು ಅದು ನಮಗೆ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಗುಣಾಕಾರ ದೊಳಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಂತರ್ದೃಷ್ಟಿಯನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದಲೂ ಹೀಗೆ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

T ಯು V ಯು ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. T ಯನ್ನು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಅಥವಾ ಏಕೈಕವಲ್ಲದ್ದು ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ V ಯು ಮೇಲೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ T_1 ಕೆಳಗಿರುವಂತೆ ಇರಬೇಕು,

(7) $TT_1 = T_1T = I$. V ಯು ಮೇಲಿನ ಸಾಮ್ಯಕ

ಏಕೈಕವಾಗಿ (7) ರಿಂದಲೇ T_1 ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $T_2T = I$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $T_1 = IT_1 = (T_2T)T_1 = T_2(TT_1) = T_2I = T_2$ ಇದು ಕೇವಲ ಪ್ರಕ್ಷೇಪ ಚಿನ್ಹೆಗಳನ್ನು ಇರಿಸುವಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಭ್ಯಾಸ. ನಾವು T_1 ಅನ್ನು Tಯು ವ್ಯಸ್ತವಿಲೋಮ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು T_1 ಅನ್ನು T^{-1} ಎಂಬುದರಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ (T–ವ ಸ ವಿಲೋಮ ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.) T ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯ ವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ T^{-1} ಕೂಡ; (7)ನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದರಿಂದ ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

Vಯು ಸಾಂತ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿದ್ದಾಗ, ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಿವೆ.

ಕೆಳಗಿರುವುದು (2)ನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 9ನ್ನು ವಿಪರೀತ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತದೆ.

(8) Vಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಆಗಿರಲಿ. Tಯು Vಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ Vಗೆ $\{TX^1, TX^2, \ldots, TX^n\}$ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಆಧಾರವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ Tಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ

T ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು T ವ್ಯಸ್ತವು T^{-1} ಆಗಿರಲಿ. $a_1TX^1+a_2TX^2+\cdots+a_nTX^n=0$ ಎಂದು ಇಟ್ಟು ಕೊಳ್ಳೋಣ. T^{-1} ಅನ್ವಯಿಸಿ, ಆಗ $0=T^{-1}(a_1TX^1+a_2TX^2+\cdots+a_n TX^n)=a_1(T^{-1}T)X^1+a_2(T^{-1}T)X^2+\cdots+a_n(T^{-1}T)X^n=a_1 X^1+a_2X^2+\cdots+a_nX^n$, $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ ಆಗುವುದರಿಂದ $\{TX^1, TX^2, \ldots, TX^n\}$ ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಈ ಕಾರಣದಿಂದ Vಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ ($\dim V=n$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ).

ವಿಲೋಮವಾಗಿ Vಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{TX^1, TX^2, \ldots, TX^n\}$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಪ್ರಮೇಯ 9ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ (ಆ ಪ್ರಮೇಯದ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿರುವ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಅನ್ನು $\{TX^1, TX^2, \ldots, TX^n\}$ ನಿಂದ ಮತ್ತು $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಅನ್ನು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯಿಂದ ಪ್ರಸ್ಥಾಪಿಸಿ) $T_1(TX^i)=X^i$, $i=1, 2, \ldots, n$ ಆಗಿರುವಂತೆ Vಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು T_1 ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಪ್ರಮೇಯ 9 ರಿಂದ $i=1, 2, \ldots, n$ಗೆ X^i ನೊಳಕ್ಕೆ X^i ಅನ್ನು ಕಳುಹಿಸುವ Vಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು I ಮಾತ್ರ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $T_1T=I$; ಅಲ್ಲದೆ $i=1, 2, \ldots, n$ಗೆ X^i ಅನ್ನು TX^i ನೊಳಕ್ಕೆ ಕಳುಹಿಸುವ ಒಂದೇ ಒಂದು Vಯ ಮೇಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಿಯೂ I ಯೇ ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ $(TT_1)(TX^i)=T(T_1(TX^i))=TX^i$. ಇದು $i=1, 2, \ldots, n$ಗೆ ಹೀಗೆ $TT_1=T_1T=I$ ಇದು (8)ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ (8) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ (8) ರಿಂದ ಹೀಗೆ ತೀರ್ಮಾನಿಸ ಲಾಗುತ್ತದೆ :

(9) V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರಲಿ. T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಕೇವಲ ಸ್ಥಾನ $(T) = dim\ V_d$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಅಥವಾ ಸಮನಾರ್ಥವಾಗಿ ಕೇವಲ ಶೂನ್ಯತೆ $(T) = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯ ವಾಗಿದೆ.

(8) ಮತ್ತು (9) ಹೇಳಿಕೆಗಳು (1) ಮತ್ತು (2) ಈ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸುತ್ತವೆ. ಹೇಳಿಕೆ (4) ಕೂಡ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣ ಮಾಡಬಹುದು. ವಾಸ್ತವ ವಾಗಿ (8) ರ ಸಾಧನೆಯೂ ಕೂಡ ಕೆಳಗಿನ ಮಾತನ್ನೇ ಹೇಳುತ್ತದೆ,

(10) V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯುವಾಗಿರಲಿ, T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. $\{X^1, X^2, \cdots X^k\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿರುವಾಗಲೆಲ್ಲ $\{TX^1, TX^2, \cdots TX^k\}$ ಎನ್ನುವುದು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

(10) ನ್ನು (9) ರಿಂದ ನೇರವಾಗಿಯೂ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ ಶೂನ್ಯತೆ $(T) = 0$ ಮತ್ತು $a_1 TX^1 + a_2 TX^2 + \cdots + a_k TX^k = 0$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $T(a_1 X^1 + a_2 X^2 + \cdots + a_k X^k) = 0$. ಹೀಗೆ $a_1 X^1 + a_2 X^2 + \cdots + a_k X^k = 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ $\{X^1, X^2, \cdots X^k\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $a_1 = a_2 = \cdots a_k = 0$; ಅಂದರೆ $\{TX^1, TX^2, \ldots, TX^k\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬಿಯಾಗಿದೆ. ವಿಲೋಮ ವಾಗಿ, ಶೂನ್ಯತೆ $(T) \neq 0$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $TX = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ $X \neq 0$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $\{X\}$ ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿ ಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $\{TX\}$ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಹೀಗಾಗಿ (10) ಮತ್ತು (9) ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ.

(5) ಮತ್ತು (6) ರ ಬಗ್ಗೆ ಏನು ? (5) ಮತ್ತು (6)ನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಕೇವಲ (3)ನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆವು. (7)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಲ್ಲಿ ಅದೇ ಸಾಧನೆ ಗಳು ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ,

(11) Tಯು, Vಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಯಾಗಿರಲಿ. $TS = 0$ ಅಥವಾ $ST = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ Vಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು S ಆಗಿರಲಿ. ಎರಡೂ ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿ $S = 0$.

(11) ಹೇಳಿಕೆಯು ಒಂದು ವಿಲೋಮವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಅದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ. (ಅಭ್ಯಾಸ 9 ನೋಡಿ)

Vಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿದ್ದಾಗ (7)ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ದುರ್ಬಲಗೊಳಿಸಬಹುದು,

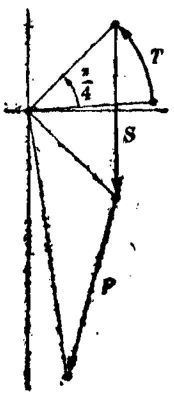
(12) $T_1T = I$ ಆಗಿರುವಂತೆ Vಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ T_1 ಇದ್ದರೆ ಆಗ Tಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $T_1 = T^{-1}$

ಹೇಳಿಕೆ (12) ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ತಾಳೆ ನೋಡಲು (7)ಕ್ಕಿಂತ ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. $T_1T = I$ ಆಗಿದ್ದರೆ $TX = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ Vಯಲ್ಲಿ X ಇರಲಿ. T_1 ಅನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ. ಆಗ $0 = T_1(TX) = (T_1T)X = IX = X = 0$. ಹೀಗೆ ಶೂನ್ಯತೆ $(T) = 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ (9) ನಮಗೆ T ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. $T_1 = T^{-1}$ ಎನ್ನುವುದು (7) ff ನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿಲೋಮದ ಏಕೈಕತೆಯ ಸಾಧನೆಯಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

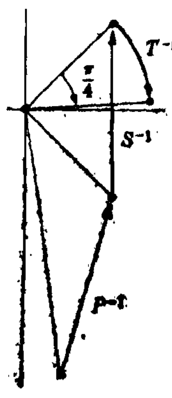
ಈಗ Vಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಒಂದು ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿವ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. T ಯು (1) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇರಲಿ. X ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ S ಒಂದು ಪ್ರತಿಫಲನ ಆಗಿರಲಿ. P ಯು ಮಾನದಂಡದ ಒಂದು ಬದಲಾವಣೆಯಾಗಿರಲಿ; ಅಂದರೆ,

(13) $S(x, y) = (x, -y)$

(14) $P(x, y) = (ax, by),\ a > 0,\ b > 0$



ಚಿತ್ರ-2



ಚಿತ್ರ-3

ಆಗ PSTಯು ಒಂದು ಆವರ್ತನೆಯಿಂದ ಆಗಿದೆ. ಇದು ಮಾನದಂಡದ ಒಂದು ಬದಲಾವಣೆಯಿಂದ ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಪ್ರತಿಫಲನೆಯಿಂದ ಆಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 2 ನೋಡಿ. ಇಲ್ಲಿ T ಯು $\pi/4$ ದಷ್ಟು ಒಂದು ಆವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $a=\frac{1}{2}$, $b=3$) PST ಯ ಪ್ರಭಾವ 'ಇಲ್ಲದಂತೆ' ಮಾಡಲು, ಮಾನದಂಡವನ್ನು ಮತ್ತೆ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು. ಅನಂತರ ಪ್ರತಿಫಲಿಸಿ, ಅನಂತರ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಆವರ್ತಿಸಲು (ಚಿತ್ರ 3 ನೋಡಿ) ಇಂತಾಗುತ್ತದೆ.

(15) $$P^{-1}(x,y)=\left(\frac{1}{a}x, \frac{1}{b}y\right),$$

(16) $$S^{-1}=S,$$

(17) T^{-1}, $\pi/4$ ದಷ್ಟು ಒಂದು ಪ್ರದಕ್ಷಿಣಕ್ರಮದ ಆವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ.

(18) $$(PST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}P^{-1}$$

ಹೇಳಿಕೆ (18), ಕೆಳಗಿರುವುದರ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಪ್ರಸಂಗವಾಗಿದೆ.

(19) V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರಲಿ, S ಮತ್ತು T ಗಳು V ಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ S ಮತ್ತು T ಗಳು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಮತ್ತು $(ST)^{-1}=T^{-1}=S^{-1}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, ST ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

S ಮತ್ತು T ಗಳು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ

$$(T^{-1}S^{-1})(ST)=T^{-1}(S^{-1}S)T=T^{-1}IT=T^{-1}T=I$$

(12) ರಿಂದ ST ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $(ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ST ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $Q=(ST)^{-1}$ ಆಗಿರಲಿ ಆಗ $I=Q(ST)=(QS)T$ (12) ರಿಂದ T ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $QS=T^{-1}$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. T^{-1} ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು $S=(ST)T^{-1}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ S ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದು (19) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ. [(19) ರಲ್ಲಿ Vಯು ಸಾಂತ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿದೆ, ಎಂಬ ಗ್ರಹಿಕೆಯು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲ್ಪಡುವಂತೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ.] ಹೇಳಿಕೆ (19) ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಎರಡು ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನವುಗಳ ಒಂದು ಗುಣ

ಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತದೆಯಾದ್ದರಿಂದ, (18), (19) ರ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಪ್ರಸಂಗ ವಾಗಿದೆ.

ಮುಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ T^{-1}ನ್ನು ಹೇಗೆ ಗಣಿಸುವುದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ 2×2 ಪ್ರಸಂಗವೊಂದನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

T ಯು R^2 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ಯು}$$

T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಕೇವಲ ಸ್ಥಾನ $(T) = 2$ [(9) ರಿಂದ] ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, T ಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ T ಯು ಕೇವಲ ಸ್ಥಾನ $(A) = 2$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಕೇವಲ A ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, ಅಂದರೆ, ಕೇವಲ $ad-bc \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಸ್ಥಾನ $(A) = 2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(20) $ad-bc \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇಷ್ಟಲ್ಲದೆ T^{-1} ಇದರ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ.

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

20 ರ ಕೊನೆಯ ಹೇಳಿಕೆಯಿಂದ T^{-1} ಗಣಿಸುವ ಶೀಘ್ರ ವಿಧಾನವೊಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅದು ಈ ಸಾಮ್ಯಕದಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ,

(21) $$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಅನ್ವಯದ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 10. V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆ

ಕೆಳಗಿರುವುವು ಸಮಾನಾರ್ಥಕಗಳಾಗಿವೆ,

(7) $TT_1 = T_1T = I$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮ T_1 ಇದೆ.

(12) $T_1T = I$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮ T_1 ಇದೆ.

(9) ಸ್ಥಾನ $(T) = dim\ V$ ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯತೆ $(T) = 0$.

(8) $\{X^1, X^2, \cdots X^n\}$ V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರುವಾಗಲೆಲ್ಲ $\{TX^1, TX^2, \cdots TX^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ.

(10) $\{X^1, X^2, \ldots X^k\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿರುವಾಗಲೆಲ್ಲ $\{TX^1, TK^1 TX^2 \ldots TX^k\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ.

ಟೀಕೆಗಳು : 'ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯ' ಪದವು ಪರ್ಯಾಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯ ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಯಾಗಿದ್ದರೆ, ನಾವು ಕೆಲವು ಸಲ T ಯು **ವಿಧಿಬದ್ಧವಾಗಿದೆ** ಅಥವಾ T ಯು ಒಂದು **ಸ್ವಗುಣಾರೋಪಣ** ಅನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ನಮ್ಮ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತೇವೆ. V ಯಿಂದ W ಗೆ T ಯು ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ. ಶೂನ್ಯತೆ $(T) = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಎಲ್ಲಾ W ಆಗಿದ್ದರೆ T ಯು **ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ** ಅಥವಾ T ಯು W ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ V ಯ ಒಂದು ಪ್ರತಿಬಿಂಬನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. V ಮತ್ತು W ಗಳು ಸಾಂತ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $dim\ V = dim\ W$ ಆಗಿರಬೇಕಾದುದು ಅವಶ್ಯಕ. ಪ್ರಮೇಯ 10, ಈ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 11· $dim\ V = dim\ W$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಮತ್ತು W ಗಳು ಸಾಂತ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಾಗಿರಲಿ, V ಯಿಂದ W ಗೆ ಆದ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆ T ಇರಲಿ. ಆಗ ಕೆಳಗಿರುವುವು ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾಗಿವೆ,

(22) W ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ V ಯ ಒಂದು ಪ್ರತಿಬಿಂಬನ T ಆಗಿದೆ.

(23) $T_1 T = I_v$ ಮತ್ತು $TT_1 = I_w$ ಆಗಿರುವಂತೆ W ಯಿಂದ V ಗೆ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆ T_1 ಇದೆ.

(24) $T_1 T = I_v$ ಆಗಿರುವಂತೆ W ಯಿಂದ V ಗೆ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆ T_1 ಇದೆ.

(25) ಸ್ಥಾನ $T) = dim\ V$ ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯತೆ $(T) = 0$.

(26) $\{X^1, X^2, \ldots X^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರುವಾಗಲೆಲ್ಲ $\{TX^1, TX^2, \ldots TX^n\}$ ಯು W ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ.

(27) $\{X^1, X^1, \ldots X^k\}$ ಯು V ಯಲ್ಲಿ ನಿರವಲಂಬಿಯಾಗಿರುವಾಗಲೆಲ್ಲ $\{TX^1, TX^2, \ldots TX^k\}$ ಯು W ಯಲ್ಲಿ ನಿರವಲಂಬಿಯಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 11 ರ ಸಾಧನೆಯು ಪ್ರಮೇಯ 10 ರ ಸಾಧನೆಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಸಾಮ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬಿಡಲಾಗುವುದು. (23) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ T_1 ಪರಿವರ್ತನೆಯು $T_1 T = I_v$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧದಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು T ಯ 'ವಿಲೋಮ' ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ; V ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿರುವ W ನ ಒಂದು ಪ್ರತಿಬಿಂಬನ T_1 ಆಗಿದೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಉಳಿದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮೇಲಿಂದ ಮೇಲೆ ಪ್ರಮೇಯ 10 ನ್ನು ಮುಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದೇಶಗಳ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಮೇಯ 11 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. T ಮತ್ತು T_1 ಗಳೆರಡನ್ನೂ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸುವುದರಿಂದ (3) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.

2. R^3 ಮೇಲಿನ ಈ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಲ್ಲಿ ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುವುದು ಯಾವುದು ? ಪರಿಕರ್ಮಿಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯ

(a) $T(x, y, z) = (x+y+z, y+z, z)$

(b) $T(x, y, z) = (x+y-z, x-y+z, x+y+z)$

(c) $T(x, y, z) = (2x+y+z, 3x+y-z, x+y+3z)$

3. R^3 ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಲ್ಲಿ ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುವುದು ಯಾವುದು ? ಪರಿಕರ್ಮಿಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, T^{-1} ಅನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ವಿವರಿಸಿ.

(a) x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿ T ಯು ಉತ್‌ಕ್ಷೇಪಿಸುವುದು.

(b) (3, 1, 2) (2, 1, 0) ಮತ್ತು (0, 0, 0) ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ T ಯು ಪ್ರತಿಫಲಿಸುವುದು.

(c) (0, 0, 0) ಮತ್ತು (1, 1, 1) ಅಂದರೆ ಇದರಿಂದ (0 0 0) ಸ್ಥಿರಪಡುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸುತ್ತ $\pi/2$ ನಷ್ಟು ಒಂದು ಆವರ್ತನೆ T ಆಗಿದೆ.

(d) Tಯು x–ಅಕ್ಷವನ್ನು y–ಅಕ್ಷದೊಳಕ್ಕೆ, y– ಅಕ್ಷವನ್ನು z–ಅಕ್ಷದೊಳಕ್ಕೆ ಕಳುಹಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು z–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸ್ಥಿರಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.

4. V ಯು ≤ 3 ಸ್ತರದ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. V ಯ ಮೇಲಿನ ಈ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಲ್ಲಿ ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುವುದು ಯಾವುದು ?

(a) $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = t(d/dt)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3)$

(b) $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = 1/t . \int_0^t (a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3) du$

5. ಕೆಳಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ R^3 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು A ಆಗಿದೆ. T ಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯ

ವಾಗಿದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ. T ಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ T^{-1} ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (b) $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

(c) $A=\begin{bmatrix}6 & -1\\ -1 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$ (d) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

(e) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

(f) $A=\begin{bmatrix}a-1 & -2\\ 1 & a+1\end{bmatrix}$ ಇಲ್ಲಿ a ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ.

(g) $A=\begin{bmatrix}a-1 & 2\\ 1 & a+1\end{bmatrix}$ ಇಲ್ಲಿ a ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ.

6. R^2 ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು ಆವರ್ತನೆಗಳ, ಪ್ರತಿಫಲನೆಗಳ ಮತ್ತು ಮಾನದಂಡದ ಬದಲಾವಣೆಗಳು ಒಂದು ಗುಣಲಬ್ಧವೆಂದು ಯಾರಾದರೂ ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ಈ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು

ಆವರ್ತನೆಗಳ, ಪ್ರತಿಫಲನಗಳ ಮತ್ತು ಮಾನದಂಡದ ಬದಲಾವಣೆಗಳ ಒಂದು ಗುಣಲಬ್ಧದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಡಲಾರದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ**. ಆವರ್ತನೆಗಳು, ಪ್ರತಿಫಲನಗಳು ಮತ್ತು ಮಾನದಂಡದ ಬದಲಾವಣೆಗಳು ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನಗಳನ್ನು **ಬದಲಾಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ**.]

7. V ಯು ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. D ಮತ್ತು T ಗಳು $f=a_0+a_1 t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $(Df)(t)=(d/dt)(f(t))$ ಮತ್ತು $(Tf)(t)=\int_0^t f(u)\,du$ ನಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡಲಿ.

(a) $DT=I$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ (b) $TD\neq I$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿಲ್ಲದಾಗ (12) ಸಾಧಾರವಾಗಿ ಆರದೆಂದು ಇದರಿಂದ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

೮. (a) V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. S ಮತ್ತು T ಗಳು V ಯ ಮೇಲಿನ ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಾಗಿರಲಿ. ST ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಮತ್ತು $(ST)^{-1} = T^{-1} S^{-1}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ:** $(T^{-1}S^{-1})(ST) = (ST)(T^{-1}S^{-1}) = I$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

(b) V ಯು ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. ST ಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುವಂತೆ ಆದರೆ ಸ್ವತಃ ಪರಿಕರ್ಮಿ S ಮತ್ತು T ಗಳು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯಗಳಾಗಿಲ್ಲದೆ ಇರುವಂತಹ S ಮತ್ತು T ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ:** ಅಭ್ಯಾಸ 7 ರ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯಗಳಾಗಿಲ್ಲವೆಂದು ತೋರಿಸಿ; ಅನಂತರ ಆ ಅಭ್ಯಾಸದ ಭಾಗ (a) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

9. V ಯು ಸಾಂತ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. $S_1 \neq 0$, $S_2 \neq 0$ ಮತ್ತು $S_1 T = TS_2 = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯ ಮೇಲೆ S_1 ಮತ್ತು S_2 ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ:** T ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ S_2 ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಒಳಗೊಂಡಿರುವಂತೆ S_2 ಅನ್ನು, S_1 ನ ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ T ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಒಳಗೊಂಡಿರುವಂತೆ S_1 ಅನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿರಿ. ಇದನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ 8 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಆಧಾರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ ಅನಂತರ S_1 ಮತ್ತು S_2 ಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ಪ್ರಮೇಯ 9 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ ಮಾಡಬಹುದು.]

10. V ಯಿಂದ W ಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು S ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು W ಯಿಂದ V ಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು T ಆಗಿರಲಿ. $\dim W > \dim V$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ST ಯು W ಮೇಲಿನ ಒಂದು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಅಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ:** ಶೂನ್ಯತೆ $T \neq 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದರಿಂದ ಶೂನ್ಯತೆ $(ST) \neq 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

11. $n \neq m$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ R^m ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿರುವಂತೆ R^n ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬನ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[**ಸೂಚನೆ** : T ಯು R^n ನಿಂದ R^m ಗೆ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ. $n > m$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಶೂನ್ಯತೆ (T) ಯು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಬಹುದೇ ? $n < m$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸ್ಥಾನ $(T) = m$ ಆಗಬಹುದೇ ?]

12. R^n ನಿಂದ R^m ಗೆ ಇರುವ ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳಲ್ಲಿ R^m ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ R^n ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬನಗಳು ಯಾವುವು ?

(a) $T(x, y, z, w) = (x - y, z + w, x - y + z, 0, w)$

(b) $T(x, y, z, w) = (x - y, z + w, x - y + z)$

(c) $T(x, y, z) = (x - 3y + 2z, 5x - y + 4z, 2x + y + z)$

(d) $T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$

13. (a) R^3 ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ ಸ್ತರ ≤ 2 ರ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಒಂದು ಪ್ರತಿಬಿಂಬನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) ಸ್ತರ ≤ 2 ರ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ $ax + by + cz$ ರೂಪದ ಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಒಂದು ಪ್ರತಿಬಿಂಬನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (ಈ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಒಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಕ್ಕೆ ಭಾಗ 3 ರ ಅಭ್ಯಾಸ $2(c)$ ಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.)

14. $\dim V = \dim W$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ W ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ V ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದಾದರೂ ಪ್ರತಿಬಿಂಬನ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನೂ ಮತ್ತು W ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನೂ ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿ ಪ್ರಮೇಯ 9ನ್ನು ಮತ್ತು (26) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

15. V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು T ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ $TT_1 = I$ ಆಗಿರುವಂತೆ, T_1 ಇನ್ನೊಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. Tಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಮತ್ತು $T^{-1} = T_1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : (–9) ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿರಿ.]

ಭಾಗ 6. ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಾಕಾರ

ಈ ಭಾಗವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಗಣನಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಕೇವಲ ಕೆಲವೇ ಹೊಸ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪರಿವರ್ತನಾ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಗಮನವಿಟ್ಟು ನೋಡಿ ಗಣನೆಗೆ ಸೂತ್ರವಿಧಿಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದು. ಮೊದಲು ನಮ್ಮ ಗಮನವನ್ನು ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಿಗೆ ಮಿತಿಗೊಳಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅನಂತರ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಲ್ಲದ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡ ಬೇಕೆಂದು ತೋರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿಂದ ಅಂತಹ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಲ್ಲಿ ಗಣನೆಗೆ ಸಾಧನಗಳನ್ನು ದೊರಕಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಭಾಗ 4 ರಲ್ಲಿ R^n ನಿಂದ R^m ಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಲಾಯಿತು. ಅನಂತರ ಎರಡೂ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಅನುಗುಣವಾಗುವಂತಹ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಮೊತ್ತ ವನ್ನೂ ಮತ್ತು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನೂ ವಿವರಿಸಲಾಯಿತು; ಅಂದರೆ A ಯು S ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವಾಗಲೆಲ್ಲ ಮತ್ತು B ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರು ವಾಗಲೆಲ್ಲ $A+B$ ಯು $S+T$ ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. A ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವಾಗಲೆಲ್ಲ ಮತ್ತು a ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರು ವಾಗಲೆಲ್ಲ aA ಯು aT ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವಂತಹ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ aA ಯನ್ನೂ ಕೂಡ ವಿಚಾರಿಸಲಾಯಿತು.

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ST ಯು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ, A ಯು S ನ ಮಾತೃಕೆ ಯಾಗಿರುವಾಗ ಮತ್ತು B ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವಾಗಲೆಲ್ಲ AB ಯು ST ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಒಂದು ಗುಣಲಬ್ಧ AB ಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಲಬ್ಧವು ನಮಗೆ ಪರಿವರ್ತನಾ ಗುಣಲಬ್ಧ ಗಳ ಗಣನೆಗೆ ಒಂದು ಸಾಧನವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. R^n ನಿಂದ R^m ಗೆ T ಯು ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $B=(B_{ij})$ ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆ ಯಾಗಿರಲಿ. R^m ನಿಂದ R^k ಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು S ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $A=(A_{ij})$ ಯು S ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ B ಯು $m \times n$ ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು A ಯು $k \times m$ ಆಗಿದೆ. ಇದಲ್ಲದೆ [ಭಾಗ 4 ರ (22) ನ್ನು ನೋಡಿ],

$$
\begin{aligned}
T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (&B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + \cdots + B_{1n}x_n, \\
&B_{21}x_1 + B_{22}x_2 + \cdots + B_{2n}x_n, \cdots, \\
&B_{m1}x_1 + B_{m2}x_2 + \cdots + B_{mn}x_n)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$(2) \qquad S(y_1, y_2, \cdots, y_m) = (A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \cdots + A_{1m}y_m,\ A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{2m}y_m, \cdots,\ A_{k1}y_1 + A_{k2}y_2 + \cdots + A_{km}y_m).$$

ST ಯು R^n ನಿಂದ R^k ಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ. $C = (C_{ij})$ ಯು ST ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ C ಯು $n \times n$ ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು

$$(3) \qquad (ST)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (C_{11}x_1 + C_{12}x_2 + \cdots + C_{1n}x_n,\ C_{21}x_1 + C_{22}x_2 + \cdots + C_{2n}x_n, \cdots,\ C_{k1}x_1 + C_{k2}x_2 + \cdots + C_{kn}x_n).$$

(1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದಲೂ (3)ನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಇದರಿಂದ $ST(x_1, x_2, \cdots, x_n) = S(T(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = S(B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + \cdots + B_{1n}x_n, B_{21}x_1 + B_{22}x_2 + \cdots + B_{2n}x_n, \cdots, B_{m1}x_1 + B_{m2}x_2 + \cdots + B_{mn}x_n) = (A_{11}(B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + \cdots + B_{1n}x_n) + A_{12}(B_{21}x_1 + B_{22}x_2 + \cdots + B_{2n}x_n) + \cdots + A_{1m}(B_{m1}x_1 + B_{m2}x_2 + \cdots + B_{mn}x_n), A_{21}(B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + \cdots + B_{1n}x_n) + A_{22}(B_{21}x_1 + B_{22}x_2 + \cdots + B_{2n}x_n) + \cdots + A_{2m}(B_{m1}x_1 + B_{m2}x_2 + \cdots + B_{mn}x_n), \cdots A_{k1}(B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + \cdots + B_{1n}x_n) + A_{k2}(B_{21}x_1 + B_{22}x_2 + \cdots + B_{2n}x_n) + \cdots + A_{km}(B_{m1}x_1 + B_{m2}x_2 + \cdots + B_{mn}x_n)) = ((A_{11}B_{11} + A_{21}B_{12} + \cdots + A_{1m}B_{m1})x_1 + (A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + \cdots + A_{1m}B_{m2})x_2 + \cdots + (A_{11}B_{1n} + A_{12}B_{2n} + \cdots + A_{1m}B_{mn})x_n, (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + \cdots + A_{2m}B_{m1})x_1 + (A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + \cdots + A_{2m}B_{m2})x_2 + \cdots + (A_{21}B_{1n} + A_{22}B_{2n} + \cdots + A_{2m}B_{mn})x_n, \cdots, (A_{k1}B_{11} + A_{k2}B_{21} + \cdots + A_{km}B_{m1})x_1 + (A_{k1}B_{12} + A_{k2}B_{22} + \cdots + A_{km}B_{m2})x_2 + \cdots + (A_{k1}B_{1n} + A_{k2}B_{2n} + \cdots + A_{km}B_{mn})x_n)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ

$$(4) \qquad {}_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{im}B_{mj}, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \ j = 1, 2, \cdots n.$$

ಮಾತೃಕೆ C ಯನ್ನು A ಮತ್ತು B ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $C = AB$ ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. (ಪರಿವರ್ತನಾ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೇ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಕ್ರಮವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ). AB ಯ i ನೇ

ಅಡ್ಡ ಸಾಲು ಮತ್ತು j ನೇ ನೀಟಸಾಲಿನ ದಾಖಲಾತಿಯನ್ನು (4) ರ ಪ್ರಕಾರ A ಯ i ನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ದಾಖಲಾತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಅನುಗುಣವಾದ B ಯ j ನೇ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ದಾಖಲಾತಿಗಳೊಡನೆ ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಪಡೆದಿದೆ. (4) ರೊಡನೆ ಪರಿಚಿತರಾಗುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸರಳ ವಿಧಾನವೆಂದರೆ (4) ರಲ್ಲಿ ಜಾಗರೂಕತೆಯಿಂದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸಿ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡುವುದು. (4)ರ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನು ಓದುಗನು ಅದನ್ನು ಸ್ವಯಂ ಉಪಯೋಗಿಸುವಷ್ಟು ಪರಿಚಯ ಪಡೆಯಬೇಕು.

(5) $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2+1.1+0.3 & 2.0+1.1+0.1 \\ 1.2+0.1+1.3 & 1.0+0.1+1.1 \\ 0.2+1.1+3.3 & 0.0+1.1+3.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}.$$

(6) $$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ಮೊದಲನೇ ಮಾತ್ರಕೆಯ ನೀಟಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಎರಡನೇ ಮಾತ್ರಕೆಯ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದೇ ಆಗಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಇದರ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿಲ್ಲ.

(7) $$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & a \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + (1-) \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2a+1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(8) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0.1 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$
(9)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1\cdot3+0\cdot1+0\cdot a & 1\cdot1+0\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot1+0\cdot(-1) & 1\cdot0+0\cdot1+0\cdot4 \\ 0\cdot3+1\cdot1+0\cdot a & 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot1 & 0\cdot1+1\cdot1+0\cdot(-1) & 0\cdot0+1\cdot1+0\cdot4 \\ 0\cdot3+0\cdot1+1\cdot a & 0\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 & 0\cdot1+0\cdot1+1\cdot(-1) & 0\cdot0+0\cdot1+1\cdot4 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.
$$

ಗಣನೆಯನ್ನು ಶೀಘ್ರಗೊಳಿಸುವ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ (4) ರಿಂದ ಕೆಲವು ತೀರ್ಮಾನಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳಬಹುದು. (8) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ A ಯು ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲು ಸೊನ್ನೆಗಳಿಂದ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಅನುಗುಣವಾದ AB ಯು ಅಡ್ಡಸಾಲೂ ಸೊನ್ನೆಗಳಿಂದ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. (7) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ B ಯು ಒಂದು ನೀಟಸಾಲು ಸೊನ್ನೆಗಳಿಂದ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅನುಗುಣವಾದ AB ಯು ನೀಟಸಾಲೂ ಸೊನ್ನೆಗಳಿಂದ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಒಂದು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಪರಿಣಾಮ ಇಂತಿದೆ :

(10) B ಯು $k \times m$ ಸೊನ್ನೆ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅಥವಾ A ಯು $m \times n$ ಸೊನ್ನೆ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ BA ಯು $k \times n$ ಸೊನ್ನೆ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

ಸೊನ್ನೆ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು 0 ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಿದರೆ, ಆಗ $0A = B0 = 0$. 0 ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪಯೋಗವೂ ವಿವಿಧ ಗಾತ್ರದ ಸೊನ್ನೆ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಯಾವ ಅಪಾರ್ಥಕ್ಕೂ ಎಡೆಕೊಡಬಾರದು. ಅಂತೂ $0A$ ಅಥವಾ $B0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕಾದರೆ, ಈ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆಯೋ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದಿರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ; ಅಂದರೆ 0 ಯ ನೀಟಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ A ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ $0A$ ಯು ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಮಾತೃಕೆ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ಇದನ್ನು

3×3 ಸಾಮ್ಯಕ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಕರ್ಣರೇಖೆಯ ಮೇಲಿ ದಾಖಲಾತಿಗಳು ಸಂಖ್ಯಾ ಒಂದು, ಕರ್ಣರೇಖೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟ ದಾಖಲಾತಿಗಳು ಸೊನ್ನೆ ಗಳಾಗಿವೆ ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸೋಣ,

(11) A ಯು $m\times n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ A ಯ **ಕರ್ಣರೇಖೆಯು** A_{ii} ದಾಖಲಾತಿಗಳಿಂದ ಆಗಿದೆ. ಕರ್ಣರೇಖೆಯ ದಾಖಲಾತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು m ಇಲ್ಲವೇ n, ಯಾವುದು ಕಿರಿದೋ ಅದಾಗಿದೆ.

(12) ಕರ್ಣರೇಖೆಯ ದಾಖಲಾತಿಗಳನ್ನು ಒಂದಾಗಿಯೂ, ಕರ್ಣರೇಖೆಯ ವಲ್ಲದ ದಾಖಲಾತಿಗಳನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗಳಾಗಿಯೂ ಹೊಂದಿರುವ $n\times m$ ಮಾತೃಕೆಯು I_n ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇದು $n\times n$ ಸಾಮ್ಯಕ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

ಕೆಳಗಿರುವ ಅಂಕಕರಣವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿದೆ. $i=j$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\delta ij=1$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು $i\neq j$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\delta ij=0$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ ನಾವು $I_n=(\delta ij)$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. 'δij' ಚಿಹ್ನೆಯು ಸಾಮಾನ್ಯವಾದುದು ಮತ್ತು **ಕ್ರೊನೇಕರ್ ಡೆಲ್ಟ** ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. I_n ನ ಗಾತ್ರವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದ್ದರೆ, n ಅನ್ನು ಬಿಟ್ಟುಬಿಡು ವುದರಿಂದ (9) ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಸಂಗವನ್ನು ಹೊಂದುವೆವು.

(13) A ಯು $m\times n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $I_mA=AI_n=A$ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸೂತ್ರ ವಿಧಿಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಬಹುದು. ಈಗ ಇನ್ನಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ,

$$(14)\ \begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&1&-1&0\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\cdot\frac{3}{2}&2\cdot1&2\cdot(-1)&2\cdot0\\1\cdot1&1\cdot0&1\cdot1&1\cdot1\\3\cdot0&3\cdot1&3\cdot1&3\cdot1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&-2&0\\1&0&1&1\\0&3&3&3\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&x\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot1&0\cdot(-1)&1\cdot x\\(-1)\cdot1&1\cdot(-1)&1\cdot x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&x\\-1&-1&x\end{bmatrix}.$$

$$(16)\qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$i \neq j$ ಗೆ $Aij = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $n \times m$ ಮಾತೃಕೆ Aಯನ್ನು ಕರ್ಣರೇಖೀಯ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. (13) ಮತ್ತು (14) ರ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ,

(17) A ಯು ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖೀಯ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು Bಯು $n \times k$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ B ಯ i ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು Aij, $i = 1, 2, \ldots n$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ABಯನ್ನು ದೊರಕಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. $i > j$ ಗೆ $Aij = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ A ಯನ್ನು **ಊರ್ಧ್ವ ತ್ರಿಕೋಣೀಯ** ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

(16) ರ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ,

(18) A ಮತ್ತು Bಗಳು ಊರ್ಧ್ವ ತ್ರಿಕೋಣೀಯ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ AB ಯು ಒಂದು ಊರ್ಧ್ವ ತ್ರಿಕೋಣೀಯ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ (10), (13), (17) ಮತ್ತು (18) ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಸಾಧನೆಗಳು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆಯ ಜಾಡನ್ನು ಹಿಡಿದಿಡಲು ಕೇವಲ ಸ್ವಲ್ಪ ಜಮಾ-ಖರ್ಚು ರೀತಿಯ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಓದುಗನು ವಿಶೇಷ ವಿಧಗಳ ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ ಅನೇಕ ಇತರ ಗುಣಾಕಾರ ಪ್ರಮೇಯುಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಲೂ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಲೂ ಶಕ್ತನಾಗಿರಬೇಕು. ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಈ ರೀತಿಯ ಹೆಚ್ಚು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಓದುಗನಿಗೆ ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಾಕಾರದೊಡನೆ ಪರಿಚಿತವಾಗಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಮೇಲೆ ತಾಳೆ ನೋಡುವುದಕ್ಕೂ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ.

ಈಗ R^n ನಿಂದ R^m ಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ಎಡ ಗುಣಾಕಾರದ ಮೂಲಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಮಾತೃಕೆಯಿಂದ ಹೇಗೆ ವಿವರಿಸಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. R^n ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶವು $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ

ಈ ಸದಿಶವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ $1 \times n$ ನೀಟಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯಂತೆ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ಅಥವಾ $1 \times n$ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆ $[x_1, x_2, \cdots x_n]$ ನಂತೆ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. T ಯು R^m ಗೆ R^n ನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು A ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಇದರಿಂದ

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \tag{19}$$

ಹೀಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ $T(x_1, x_2 \cdots, x_n) = y_1, y_2, \ldots, y_m)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, T ಯ ಕಾರ್ಯವು A ಯಿಂದ ಎಡಗುಣಾಕಾರದಿಂದ ನಿರ್ವಹಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಅದೂ ಅಲ್ಲದೆ

$$[x_1 x_2 \cdots x_n] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} = [y_1 y_2 \cdots y_m]. \tag{20}$$

ಹೀಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ, $T(x_1, x_2 \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. (20) ರಲ್ಲಿನ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು A ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ನೀಟ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಪಡೆದಿದೆ. (4) ಮತ್ತು (1) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ (11) ಮತ್ತು (20) ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು. ಇವನ್ನು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಡನೆ ನಿರೂಪಿಸೋಣ. $T(1,0) = (1, 1, 0)$ ಮತ್ತು $T(0, 1) = (0, 1, 1)$ ನಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ R^2 ನಿಂದ R^3 ಗೆ ಆದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು T ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಮಾತೃಕೆ T ಯು ಹೀಗಿದೆ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ಅಂದರೆ $T(x, y) = T(x(1, 0) + y(0, 1)) = xT(1, 0) + yT(0, 1) =$

$(x, x+y, y)$ ಇದೂ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x+y \\ y \end{bmatrix},$$

ಇದು (19) ಆಗಿದೆ ಅಥವಾ

$$[x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [x \; x+y \; y],$$

ಇದು (20) ಆಗಿದೆ.

ಟೀಕೆಗಳು : ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಗಣನಾತ್ಮಕ ಪ್ರಕ್ರಿಗಳನ್ನು ಮಾತೃಕೆ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನಾಗಿ ಸಂಕುಚಿಸಲು (19) ನ್ನಾಗಲೀ ಅಥವಾ (20) ನ್ನಾಗಲೀ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ (19) ನ್ನು ಎರಡು ಕಾರಣಗಳಿಗಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸುವ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಚರಾಂಕದ ಎಡಕ್ಕೆ ಬರೆಯುತ್ತ ಬಂದಿದ್ದೇವೆ, ಅಂದರೆ ನಾವು XT ಎಂದು ಬರೆಯುವುದಕ್ಕಿಂತ TX ಎಂದೇ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮಾತೃಕೆ A ಯನ್ನು ಸಹ ಎಡಗಡೆಯೇ ಬರೆಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ (19) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಎರಡನೇ ಕಾರಣವು ಬಹುಮುಖ್ಯವಾದುದು. (20) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು A ಯು S ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು B ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ [(1) ಮತ್ತು (2) ರ ಅಂತಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು)]

$(ST)(x_1, x_2 \cdots x_n) = (z_1, z_2, \ldots, z_k)$ ಆಗುವುದು

$$(21) \quad [x_1, x_2 \cdots x_n] \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & \cdots & B_{m1} \\ B_{12} & B_{22} & \cdots & B_{m2} \\ \vdots & & & \\ B_{1n} & B_{2n} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{k1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{k2} \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{km} \end{bmatrix}$$

$= [z_1, z_2 \cdots z_k]$ ಹೀಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ.

ಅಂದರೆ $(ST)(x_1, x_2 \cdots x_n) = (z_1\, z_2 \cdots z_k)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಪುನಃ ಗುಣಲಬ್ಧವೇ ಬಂದಿತು. ಈ ಅಂಕನವು ಅನೇಕ ಲೇಖಕರು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿದೆ.

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಾಕಾರದ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನಾಗಿ ಹೇಳಿಕೆ (19) ವರ್ಗಾಯಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ನಾವು ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಮಾತೃಕೆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ವರ್ಗಾಯಿಸಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹವು,

$$
\begin{aligned}
A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= y_1 \\
A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= y_2 \\
\vdots \\
A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= y_m
\end{aligned} \tag{22}
$$

ಕೆಳಗಿನ ಬಿಡಿ ಸಮೀಕರಣವಾಗುತ್ತದೆ.

$$AX = Y \tag{23}$$

ಇಲ್ಲಿ A ಯು (22) ರ ಸಹ ಗುಣಕಗಳ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಭಾಗ 1 ಮತ್ತು 2 ರ ವಿಧಾನಗಳು A ಮತ್ತು Y ಗಳ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳ ಮೇಲೆ ಪರಿಕರ್ಮಿಸಿ ಸಮೀಕರಣ (23) ನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. (22) ಕ್ಕಿಂತ (23) ರಲ್ಲಿ ಅಂಕನದಲ್ಲಿ ಗಣನೀಯವಾದ ಉಳಿತಾಯವಾಗಿರುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ.

ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಾಕಾರದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ನಿಯಮಗಳೇನು ? ಇವು ಭಾಗ 4 ರ (44) (45) ಮತ್ತು (46) ರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಪರಿವರ್ತನಾ ಗುಣಾಕಾರದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸೂತ್ರವಿಧಿಗಳಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ A ಯು $m\times n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, B ಯು $n\times k$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು C ಯು $k\times r$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(AB)C = A(BC)$. A ಯು $m\times n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, B ಯು $n\times k$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು a ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $a(AB) = (aA)B = A(aB)$.

ಈಗ ಎಲ್ಲ ಮಾತೃಕೆಗಳೂ $n\times n$ ಆಗಿರುವಂತಹ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ ವಿಶಿಷ್ಟ

ಗೊಳಿಸೋಣ. ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು BA ಗಳೆರಡನ್ನೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದೆ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ $AB \neq BA$ ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$(24) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಘಾತಕಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಬಹುದು.

(25) A ಯು $n \times n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$ ಇತ್ಯಾದಿ. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ $A^{k+1} = A^k A$.

$(AA)A = A(AA)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ನಾವು A^3AAA ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು ಮತ್ತು ಯಾವ ಸಂದಿಗ್ಧತೆಯೂ ಪರಿಣಮಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ A ಯು, R^n ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. ಭಾಗ 5 ರಲ್ಲಿ ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದೆವು. ಈಗ ನಾವು T ಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭರವಸೆ ಕೊಡುವ A ಯ ಮೇಲಿನ ನಿರ್ಬಂಧಗಳನ್ನು ಮತ್ತು T^{-1} ಇದರ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಗಣಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನೂ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಎಂದು ಹೇಳಲ್ಪಡುವುದು A ಯು R^n ಮೇಲಿನ ಒಂದು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ. ಒಂದು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದಿಂದ [ಭಾಗ 5 ರ (7)] ಇದೂ B ಯು T^{-1} ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವಲ್ಲಿ

$$(26) \qquad AB = BA = I_n$$

ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ B ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳುವುದೂ ಒಂದೇ ಮತ್ತು ಭಾಗ 5 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ B ಯು (26) ರಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ನಾವು B ಯನ್ನು A ಯ 'ವ್ಯಸ್ತ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು $B = A^{-1}$ ಎಂದು

ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಗುಣಧರ್ಮವನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನಗಳು ಇಂತಿವೆ :

(a) ಸ್ಥಾನ $(A) = n$

(b) ನೀಟಸಾಲಿನ ಸ್ಥಾನ $(A) = n$

(c) ಶೂನ್ಯತೆ $(A) = 0$

(d) $BA = I_n$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ B ಇದೆ.

(27) (e) $AB = I_n$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ B ಇದೆ.

(f) A ಯ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳು ನಿರವಲಂಬಿಯಾಗಿವೆ.

(g) $AX = 0$ ಎನ್ನುವುದು ಯಾವುದೇ $n \times 1$ ಮಾತೃಕೆ X ಗೆ $X = 0$ ಎನ್ನುವ ಅರ್ಥವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

(h) ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ B ಯು ಕೆಳಗಿರುವಂತೆ ಇದೆ,

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ ಇದು ಕೇವಲ } B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ}$$

ಪ್ರಮೇಯ 10 ರಲ್ಲಿ ಹೇಳಿಕೆಗಳು $(27\ a, c, d)$ ಒಳಗೊಂಡಿವೆ. ಸ್ಥಾನ (A) = ನೀಟಸಾಲು ಸ್ಥಾನ (A) ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $(27\ a, b)$ ಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ (ಪ್ರಮೇಯ 8ರ ಮೇಲಿನ ಟೀಕೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿ). ಭಾಗ (8) ಮತ್ತು ಭಾಗ (a) ಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ. (22) ಮತ್ತು (23) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ ಭಾಗ (g) ಮತ್ತು ಭಾಗ (c) ಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ. ಭಾಗ (e) ಯು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ,

(28) A ಮತ್ತು B ಗಳು $n \times m$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಕೇವಲ A ಮತ್ತು B ಗಳು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ AB ಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. AB ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

ಇದು ಭಾಗ 5 ರ (19) ರ ಮಾತೃಕೆ ಸದೃಶವಾಗಿದೆ.

ಈಗ $(27h)$ ಮತ್ತು (26) ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ. A ಯು

ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $B = A^{-1}$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ ಆಗಿದ್ದರೆ,}$$

A^{-1} ಅನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು. ಇದರಿಂದ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (A^{-1}A) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

ಹೀಗೆ $(27h)$ ಯು (26) ರಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. A ಮತ್ತು B ಗಳು $(27h)$ ಅನ್ನು ಪಾಲಿಸಲಿ. ಈಗ

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.}$$

ಆಗ

$$B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ಹೀಗೆ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

A ಯು $(27g)$ ಯನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದು $(27h)$ (26) ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುವಾಗ, ಮಾತೃಕೆ ಸಮೀಕರಣ

$$AX = Y, \text{ ಯು} \tag{29}$$

X ಮತ್ತು Y ಗಳು $n \times 1$ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿರುವಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿರುವ ಒಂದು ಏಕೈಕ

ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು $(2h)$ ಹೇಳಿಕೆಯಿಂದ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

$$(30) \qquad X = A^{-1} Y.$$

A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ (29):ನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು A^{-1} ನ ಗಣನೆಯಾಗಿ ಸಂಕುಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. A.ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು $(27a)$ ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದಾದ್ದರಿಂದ ನಮಗೆ A^{-1} ನ ಗಣನೆಯು ಪ್ರಶ್ನೆಯೊಂದು .ಮಾತ್ರ ಉಳಿದಿದೆ. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ,

$$(31) \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

ಆಗ ಸ್ಥಾನ $(A) = 3$ ಆಗುವುದರಿಂದ, A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ, ಈಗ

$$A^{-1} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \text{ ಆಗಿರಲಿ}$$

ಆಗ

$$(32) \quad A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{bmatrix}, A^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \\ B_{32} \end{bmatrix}, A^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{13} \\ B_{23} \\ B_{33} \end{bmatrix},$$

ಇದೂ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿರುವುದೂ ಒಂದೇ [$(27h)$ ಅನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.)

$$(33) \quad A\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \\ B_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} B_{13} \\ B_{23} \\ B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(33) ರ ಎಲ್ಲ ಮೂರೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲಿಕವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ರೂಪಿಸುವುದರಿಂದ ಬಿಡಿಸಬಹುದು,

$$(34) \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ಈ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಂಕುಚಿಸಿರಿ,

$$(35) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{11} & -\frac{6}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

ಆಗ

$$(36) \qquad A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿರುವುದರ ಮೇಲೆ ಏಕಕಾಲಿಕವಾಗಿ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ನೆರವೇ ಲಾಗುವಂತೆ ಮಾತೃಕೆ (34) ನ್ನು ರೂಪಿಸಿದೆ,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಫಲಿತಾಂಶವು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 12. A ಯು $n \times n$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಕೇವಲ A ಯನ್ನು I_n ಗೆ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಸಂಕುಚಿಸಬಹುದಾದರೆ ಮಾತ್ರ A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ, A ಯನ್ನು I_n ಗೆ ಸಂಕುಚಿಸಿದಾಗ Aಗೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನೇ, **ಅದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೇ,** I_n ಗೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ, A^{-1} ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : ಕೇವಲ A ಯನ್ನು I_n ಗೆ ಸಂಕುಚಿಸಬಹುದಾದರೆ ಮಾತ್ರ A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದು ಪ್ರಮೇಯ 2 ಮತ್ತು (27c) ಯ ಒಂದು ಪರಿಣಾಮ. A^{-1} ನ ಗಣನೆಯ (32) ರಿಂದ (36)ರ ವರೆಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ವಿಧಾನದ ನೇರ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೈಬಿಡಲಾಗುತ್ತದೆ. *Q.E.D.*

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯ ಅಂತಿಮ ಪ್ರಕರಣಗಳು R^n ಗಿಂತ ಬೇರೆಯಾದ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಗಣನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ. 'ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ' ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸೋಣ.

V ಯು ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. V ಯಲ್ಲಿ X ಇರಲಿ. ಆಗ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು V ಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದರಿಂದ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು,

$$(37) \qquad X = x_1X^1 + x_2X^2 + \cdots + x_nX^n$$

ಬೀಜೋಕ್ತಿ (37) ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ

$$X = y_1X^1 + y_2X^2 + \cdots + y_nX^n \text{ ಇರಲು}$$

ಆಗ $0 = (x_1-y^1)\ X^1 + (x_2-y_2)\ X^2 + \cdots + (x_n-y_n)\ X^n$. ಹೀಗೆ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$, ನಾವು ಕ್ರಮಪಡಿಸಿದ *n–tuple* $(x_1, x_2 \cdots x_n)$ ಗಳನ್ನು (ಕ್ರಮಪಡಿಸಿದ) ಆಧಾರ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ X ನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮೊದಲು ಒಂದು ಕ್ರಮಪಡಿಸಿದ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸದಿಶವನ್ನೂ ಮೊದಲು ನಿರೂಪಿಸಿ ನಂತರ R^n ನಲ್ಲಿನ ಗಣನೆಯನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸುವುದರಿಂದ V ಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಗಣನೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮೊದಲು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಮಾತೃಕೆಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಕೊಡೋಣ.

T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. A ಯು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ TX^j ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವಂತಹ j ನೇ ನೀಟಸಾಲನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ, A ಇದನ್ನು (ಕ್ರಮಪಡಿಸಿದ) ಆಧಾರ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಇದಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿರುವ T ಯ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದರಿಂದ

$$(38) \qquad TX^j = A_{1j}X^1 + A_{2j}X^2 + \cdots + A_{nj}X^n,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಏಕೈಕತೆಯು A ಯು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ನಾವು ಈಗ (19) ನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಿದ ಹಾಗೆಯೇ ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನೂ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಬಹುದು.

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ } TX = Y \text{ ಇಲ್ಲಿ } A \text{ ಯು } T \text{ ಯ}$$

ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ಮತ್ತು $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ X ಮತ್ತು Y ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಾಗಿವೆ. ಇವೆಲ್ಲವೂ $\{X^1 X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿವೆ.

(40) S ಮತ್ತು T ಗಳು V ಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು A ಯು S ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು B ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾದ್ದರೆ, ಆಗ ಎಲ್ಲವೂ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ AB ಯು ST ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

ಹೇಳಿಕೆ (40)ನ್ನು (4) ರ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಸ್ಥಾಪಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, V ಯ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಗಣನಾತ್ಮಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳೂ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮತ್ತು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಾಗಿ ಸಂಕುಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಇದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು.

R^n ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ V ಯ ಒಂದು ಪ್ರತಿಬಿಂಬನ P ಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲು (37) ನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. P ಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗುವುದು.

(41) $PX = (x_1, x_2, \cdots, x^n)$ ಇದು $X = x_1X^1 + x_2X^2 + \cdots + x_nX^n$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ. *n-tuple* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ಯು X (ಮತ್ತು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$) [2] ನಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುವುದರಿಂದ R^n ಗೆ V ಯ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು (41) ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತದೆ. $X = x_1X^1 + x_2X^2 + \cdots + x_nX^n$ ಮತ್ತು $Y = y_1X^1 + y_2X^2 + \cdots + y_nX^n$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $aX + bY = (ax_1 + by_1)X^1 + (ax_2 + by_2)X^2 + \cdots + (ax_n + by_n)X^n$ ಆದ್ದರಿಂದ

(42)
$$P(aX + by) = (ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, \cdots, ax_n + by_n) \\ = aPX + bPY.$$

ಬೇರೆ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ P ಯು ರೇಖೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು (42) ಹೇಳುತ್ತದೆ. $PX = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ $X = 0$ ಹೀಗೆ ಶೂನ್ಯತೆ $(P) = 0$ ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 11 ರಿಂದ P ಯು R^n ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ V ಯ ಒಂದು ಪ್ರತಿಬಿಂಬನ ಆಗಿದೆ.

ಕೇಂದ್ರ ಫಲಿತಾಂಶವು ಪ್ರಮೇಯ 11 ರಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

43) $\{PY^1, PY^2, \ldots, PY^k\}$ ಯು R^n ನಲ್ಲಿ ನಿರವಲಂಬಿಯಾಗಿ ದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

$\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^k\}$ ಯು V ಯಲ್ಲಿ ನಿರವಲಂಬಿಯಾಗಿರುವುದು.

(43) ರ ಅಂಶವನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ 11 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರಲಿಲ್ಲ. $\{PY^1, PY^2, \ldots, PY^k\}$ ಯ ನಿರವಲಂಬನೆಯು $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^k\}$ ಯ ನಿರವಲಂಬನೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಈಗ ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದು P ಯು ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಈಗ $\{PY^1, PY^2, \ldots, PY^k\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬಿಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $a_1 Y^1 + a_2 Y^2 + \cdots + a_k Y^k\} = 0$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. P ಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ ಆಗ $0 = a_1 PY^1 + a_2 PY^2 + \cdots + a_k PY^k$ ಆಗುವುದರಿಂದ $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$ ಅಂದರೆ $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^k\}$ ಕೂಡ ನಿರವಲಂಬಿಯಾಗಿದೆ.

ನಿರವಲಂಬನೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಆ ಕಾರಣದಿಂದ ಅವಲಂಬನೆಯ ಕುರಿತ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನೂ, V ಯಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ(V ಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ) ಅನಂತರ R^n ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸುವುದರಿಂದ, V ಯಲ್ಲಿ ಖಚಿತ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ತರಿಸಬಹುದೆಂದು ಹೇಳಿಕೆ (43) ಹೇಳುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಸ್ತರ ≤ 2 ಇರುವ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $\{1, t, t^2\}$ V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ.

$$f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \text{ ಆಗಿದ್ದರೆ}$$

ಆಗ f ನ ನಿರ್ದೇಶನಗಳು $\{1, t, t^2\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ, (a_0, a_1, a_2) ಗಳಾಗಿವೆ.

ಗಣ $\{1+t+t^2,\ 1-3t+2t^2,\ 3-t+4t^2\}$ ಯು V ಯಲ್ಲಿ ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆಯೇ ? $\{1, t, t^2\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ $1+t+t^2$, $1-3t+2t^2$ ಮತ್ತು $3-t+4t^2$ ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $(1, 1, 1)$, $(1, -3, 2)$ ಮತ್ತು $(3, -1, 4)$ ಇವೆ. ಈಗ

$$\text{ಸ್ಥಾನ} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = 2,$$

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\{(1,1,1),\ (1,-3,2),\ (3,-1,4)\}$ ಯು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಮತ್ತು ಆ ಕಾರಣದಿಂದ $\{1+t+t^2,\ 1-3t+2t^2,\ 3-t+4t^2\}$ ಯು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ V ಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ T ಇರಲಿ,

(44) $$Tf=\frac{d}{dt}(tf)$$

ಆಗ

(45) $$T1=1,\quad Tt=2t,\quad Tt^2=3t^2$$

$\{1,t,t^2\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ.

(46) $$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

ಆಗ ಹೇಳಿಕೆ (39) ಇದರಿಂದ

(47) $Tf=a_0+2a_1t+3a_2t^2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು $f=a_0+a_1t+a_2t^2$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ

$\{1,t,t^2\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T^r ನ ಮಾತೃಕೆಯು $r\geq 1$ ಹೀಗಿದೆ [(38) ಉಪಯೋಗಿಸಿ]

(48) $$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}^r=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2^r&0\\0&0&3^r\end{bmatrix}.$$

ಹೀಗೆ

(49) $$T^r(a_0+a_1t+a_2t^2)=a_0+2^ra_1t+3^ra_2t^2.$$

(40) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಸಮೀಕರಣ (48) ಸುಲಭವಾಗಿದೆ, ಆದರೆ (44) ರಿಂದ ಅದು ತಕ್ಷಣ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ,

(50) $$T^rf=\frac{d}{dt}\left(t\cdot\frac{d}{dt}\left(t\cdot\frac{d}{dt}\cdots\frac{d}{dt}(tf)\right)\cdots\right).$$

ನಾವು ಈಗ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಆಗಿರಲಿ. V ಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ಆಧಾರವು $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಆಗಿರಲಿ $X + x_1X^1 + x_2X^2 + \cdots + x_nX^n$ ಮತ್ತು $X = y_1Y^1 + y_2Y^2 + \cdots + y_nY^n$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ಮತ್ತು $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧವೇನು ?

$P_0 = (P_{ij})$ ಯು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ $n + n$ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿರಲಿ,

(51) $$X^j + P_{1j}Y^1 + P_{2j}Y^2 + \cdots + P_{nj}Y^n, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

ಇದರಿಂದ

(52) $$P_0 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

ಇದನ್ನು $X = x_1X^1 + x_2X^2 + \cdots + x_nX^n$ ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು X^j ಯನ್ನು (51) ರಿಂದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸುವುದರಿಂದ ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು.

ಕೇವಲ $X = 0X^1 + 0X^2 + \cdots + 0X^n$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $X = 0Y^1 + 0Y^2 + \cdots + 0Y^n$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $(27g)$ ಯಿಂದ P_0 ಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುವುದು. ಆಗ

(53) $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = P_0^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

$P_0^{-1} + (Q_{ij})$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ (53) ಮತ್ತು

(54) $$Y^j = Q_{1j}X^1 + Q_{2j}X^2 + \cdots + Q_{nj}X^n, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ.

$\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಎಡಭಾಗವನ್ನು ದೊರಕಿಸಲು Y^j ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿಯೂ ಬಲಭಾಗವನ್ನು ದೊರಕಿಸಲು (52) ನ್ನು ಗಣಿಸುವುದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (54) ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು.

(52) ಮತ್ತು (53) ಸೂತ್ರಗಳು, (51) ಮತ್ತು (54) ರೊಡಗೂಡಿ 'ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸು'ವುದಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ.

$$PY^j = X^j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು P ಆಗಿರಲಿ. ಸೂತ್ರಗಳು (51) ಪ್ರಮೇಯ (20) ರಿಂದ P ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ.

(55) $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ P ಯ ಮಾತೃಕೆಯು P_0 ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಸೂತ್ರಗಳು (51) ಹೇಳುತ್ತವೆ.

T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು A ಯ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ B ಯು $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ A ಮತ್ತು B ಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧವು ಇಂತಿದೆ:

(56) $$B = P_0 A P_0^{-1}$$

(56) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು, ನಾವು (39), (52) ಮತ್ತು (53) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. $X = x_1X^1 + x_2X^2 + \cdots + x_nX^n = x_1'Y^1 + x_2'Y^2 + \cdots + x_n'Y^n$ ಆಗಿರಲಿ $Z = z_1X^1 \times z_2X^2 + \cdots + z_nX^n = z_1'Y^1 + z_2'Y^2 + \cdots + z_n'Y^n$ ಆಗಿರಲಿ, ಆಗ.

(57) ಕೇವಲ $B\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_n' \end{bmatrix}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $TX = Z$;

(58) ಕೇವಲ $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $TX = Z$;

$$(59) \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = P_0^{-1} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_n' \end{bmatrix} = P_0 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

(57) ಮತ್ತು (58) ಹೇಳಿಕೆಗಳು (39) ರಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತವೆ (53) ಮತ್ತು (52) ರಿಂದ ಹೇಳಿಕೆ (59) ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿದರೆ

$$B \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_n' \end{bmatrix} = P_0 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = P_0 A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} = P_0 A P_0^{-1} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

ಇದರಿಂದ (56) ಸಫಲವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಟೀಕೆಗಳು : ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಒಂದು ವಿಲೋಮವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. $P_0 = (Pij)$ ಯು ಒಂದು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ $n \times m$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (51) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು X^jಯನ್ನು, $1 \leq j \leq n$, ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿ $c_1 X^1 + c_2 X^2 + \cdots + c_n X^n = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ, $0 = (P_{11} c_1 + P_{12} c_2 + \cdots + P_{1n} c_n) Y^n$ $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ನ ನಿರವಲಂಬನೆಯಿಂದ ಮತ್ತು P_0 ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿಂದ ನಾವು $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ ಎಂದು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\{X^1 X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿವೆ. ಇದನ್ನು ನಮಗೆ $\{Y^1, Y^2 \ldots Y^n\}$ ಕೊಟ್ಟಲ್ಲಿ ಆಧಾರಗಳು $\{X^1, X^2 \ldots X^n\}$ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ $n \times m$ ಮಾತೃಕೆಗಳು P_0 ನಡುವೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ ಒಂದೊಂದು ಸಂವಾದಿತ್ವ ಇದೆಯೆಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಸೂತ್ರ (51) ರಿಂದ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಮತ್ತು P_0 ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧವು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

V ಯು ಬಾಣಗಳ ಸಮಷ್ಟಿ ಮತ್ತು $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ಯು, ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಉದ್ದ 1 ನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿದ್ದು, V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{j}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + k$, ಮತ್ತು $\mathbf{k}_1 = \mathbf{i} \times 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ಆಗಿರಲಿ ಆಗ

(60) $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ.

ಇದು ಕೆಳಗಿರುವ ಸಂಗತಿಯಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

$$\text{ಸ್ಥಾನ}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}=3$$

[ಇಲ್ಲಿ (43) ನ್ನೂ ಮತ್ತು $\{i, j, k\}$ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ i_1, j_1, k ಮತ್ತು k_1ನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (1, 1, 1), (1, −1, 1) ಮತ್ತು (1, 1, −1) ಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.]

ಈಗ $v = xi + yj \times zk$ ಮತ್ತು $v = x_1 i_1 + y_1 j_1 + z_1 k_1$ ಆಗಿರಲಿ ಆ

$$(61)\qquad \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}$$

ಇದು ಸೂತ್ರ (53) ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ P_0^{-1} ಅನ್ನು (54) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಇದನ್ನು $\{i, j, k\}$ ಯಿಂದ ಮತ್ತು $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಯು $\{i, j, k\}$ ನಿಂದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸಿದೆ. (ಪ್ರಮೇಯ 12 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು) ಇದರಿಂದ

$$(62)\qquad \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

ಹೀಗಾಗಿ

$$(63)\qquad \begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ V ಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು T ಆಗಿರಲಿ,

$$(64)\qquad T(xi+yj+zk)=\frac{x+z}{z}\,i+(y+z-x)j+\frac{x+z}{2}\,k$$

ಆಗ $\{i, j, k\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ.

5) $$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\{i, j, k\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲ
6) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಇದು ಹೀಗಿದೆ,

6) $$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7) $Ti_1 = i_1$, $Tj_1 = j_1$, ಮತ್ತು $Tk_1 = k_1$
ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುವುದು.

ಟೀಕೆಗಳು : (67) ರ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಭಾಗ 3 ರಲ್ಲಿ, ಕೆಲವು ಸದ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳನ್ನು ಕರ್ಣರೇಖೀಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸುವ, ಒಂದು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

(56) ಸ್ವಲ್ಪ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಮಹತ್ವವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೂ (51) ರಿಂದ (54) ರೆಗಿನ ಮತ್ತು (56) ಸೂತ್ರ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಗಣನೆಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಎರಡು $\times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳು A ಮತ್ತು B ಸದೃಶವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು

$$B = P_0 A P_0^{-1}$$

ುವಂತೆ ಒಂದು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ P_0 ಇರುವುದು ಅವಶ್ಯವಿದೆ. ಯು ಆಧಾರ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆ ಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ B ಯು Y^i ಯು (54) ರಿಂದ ಪಡೆದ $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಗೆ ಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ ಹೀಗೆ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳು, ಕೇವಲ ಅವು ರೆ ಬೇರೆ ಆಧಾರಗಳಿಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಒಂದೇ ಪರಿಕರ್ಮಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿ ರೆ ಮಾತ್ರ ಸದೃಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

T ಯ ಮಾತೃಕೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನು, W ಗೆ ಆದ V ಯ ಒಂದು ಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆ T ಆಗಿರುವ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು $\{X^1, X^2, \ldots,$

$X^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\{Z^1, Z^2,\ldots,Z^n\}$ ಯು W ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. A ಯು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ $m\times n$ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿರಲಿ.

(68) $$TX^j = A_{1j}Z^1 + A_{2j}Z^2 + \cdots + A_{mj}Z^m$$

ಕ್ರಮಪಡಿಸಿದ ಆಧಾರಗಳಾದ $\{X^1, \ ^2,\ldots,X^n\}$ ಮತ್ತು $\{Z^1, Z^2, \ldots,Z^n\}$ ಗಳಿಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯು ಮಾತೃಕೆ A ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸೂತ್ರ (39) ಹೀಗಾಗುತ್ತದೆ

(69) $$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$ ಆಗಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ $TX = Y$

ಇಲ್ಲಿ

$X = x_1X^1 + x_2X^2 + \cdots + x_nX^n$ ಮತ್ತು $Y = y_1Z^1 + y_2Z^2 + \cdots + y_mZ^m$

ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ (56) ರಂಥ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು (56) ರ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯ ವಿಧಾನಗಳಿಗೆ ಸದೃಶವಾದ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ $\{Y^1, Y^2,\ldots,Y^n\}$ ಯು V ಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $\{U^1, U^2,\ldots,U^m\}$ ಯು W ಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

(70) $B = Q_0AP_0^{-1}$ ಇಲ್ಲಿ B ಯು $\{Y^1, Y^2,\ldots,Y^n\}$ ಗೆ ಮತ್ತು $\{U^1,U^2,\ldots,U^m\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. $P_0 = (Pij)$ ಯು, $X^j = P_{1j}Y^1 + P_{2j}Y^2 + \cdots + P_{nj}Y^n$, $j = 1, 2,\ldots,n$ ನಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಮಾತೃಕೆ ಮತ್ತು $Q_0 = (Qij)$ ಯು $U^j = Q_{1j}Z^1 + Q_{2j}Z^2 + \cdots + Q_{mj}Z^m$ ನಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತೃಕೆ.

(51) ರಿಂದ (54) ರ ವರೆಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು (56), (69) ಮತ್ತು (70) ನ್ನು ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಲು ಯಾವ ಸರಳ ವಿಧಾನವೂ ಇಲ್ಲ. ಓದುಗನಿಗೆ ಈ ಸೂತ್ರಗಳ ರೂಪಗಳನ್ನು ಗಮನವಿಟ್ಟು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದೆಂಬುದನ್ನೂ ಕಲಿಯಲು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಯಾ ಬಗೆಯ ಪ್ರಸಂಗಗಳ ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯು ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತದೆ.

V ಯ ಬಗೆಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು R^n ಬಗೆಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಲು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿವೆ. ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು R^n ಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳೊಡನೆ ಹೇಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ? i ನೇ ನಿರ್ದೇಶಕವನ್ನು ಒಂದು ಆಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಇತರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗಳಾಗಿಯೂ ಹೊಂದಿರುವ R^n ನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸದಿಶವು E^i ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ$\{E^1, E^2,\ldots,E^n\}$ಯು R^n ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. ಈ ಆಧಾರವನ್ನು (ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ) R^nಗೆ ಇರುವ **ಶಿಷ್ಟ ಆಧಾರ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. $X=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $X=x_1E^1+x_2E^2+\cdots+x_nE^n$, ಆಗುವುದರಿಂದ R^n ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಮಾತನಾಡುವಾಗ ನಮ್ಮ ಅರ್ಥ $\{E^1, E^2,\ldots,E^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಎಂದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ R^n ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಕೇವಲ $\{E^1, E^2,\ldots, E^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ನಾವು R^n ನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವಾಗ ಯಾವುದೇ ಗೊಂದಲವು ಪರಿಣಮಿಸದಿದ್ದರೆ $\{E^1, E^2,\ldots,E^n\}$ ನ ಉಲ್ಲೇಖವನ್ನು ಬಿಟ್ಟುಬಿಡುವುದನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

(51) ರಲ್ಲಿ $\{Y^1, Y^2,\ldots,Y^n\}$ ಯು R^n ಗೆ ಶಿಷ್ಟ ಆಧಾರವಾಗಿರುವಾಗ ತನ್ನ j ನೇ ನೀಟಸಾಲು X^j ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ $\{E^1,E^2,\ldots, E^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯು P_0 ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ. ಇದು (55) ರಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. ಕೆಳಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಗಣಿಸಿರಿ.

(a) $$\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 6 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(c) $$\begin{bmatrix}2 & 1 & \pi & \sqrt{2}\\ 0 & 3 & -\sqrt{2} & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(d) $\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & \frac{2}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{7}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{8}\end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix}-1 & 0.01 & 0.001\\ 0.002 & 0.01 & 0.003\\ 2.01 & 0.01 & -0.02\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

(k) $\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ (l) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(m) $\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (n) $\begin{bmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(o) $\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$ (p) $\begin{bmatrix}6 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

2. AB ಯ ಗುಣಲಬ್ಧವು ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿ A ಯ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಬೇರೆ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ $C=AB$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $A_{i_0j}=aD_{i_0j}+bE_{i_0j}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಇದಕ್ಕೆ i_o ಸ್ಥಿರವಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು $j=1, 2,\ldots n$ ಆಗ $i\neq i_o$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $C_{i_0j}=a(D_{i_01}B_{1j}+D_{i_02}B_{2j}+\cdots+D_{i_0n}B_{nj})+b(E_{i_01}B_{1j}+E_{i_02}B_{2j}+\cdots+E$

B_{ni} ಆಗಿದ್ದರೆ, $j=1, 2, \ldots, n$ ಗೆ $C_{ij} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \cdots + A_{in} B_{nj}$ ಆಗಿರುವುದು.

3. (a) ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ (3) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು (16), (17) ಮತ್ತು (18) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.

(b) ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ (3) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು AB ಮತ್ತು C ಗಳು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿರುವಲ್ಲಿ ಸಾವ್ಯಕಗಳಾದ $A(BC) = (AB)C$, $A(B+C) = AB + AC$ ಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.

4. $i > j$ ಗೆ $A_{ij} = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು **ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಊರ್ಧ್ವತ್ರಿಕೋಣೀಯ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(a) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ಗಳು ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಊರ್ಧ್ವತ್ರಿಕೋಣೀಯ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $A_1, A_2, \ldots, A_n = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) A ಮತ್ತು B ಗಳು $n \times n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ A ಯು ಊರ್ಧ್ವತ್ರಿಕೋಣೀಯವಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು B ಯು ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಊರ್ಧ್ವತ್ರಿಕೋಣೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ, AB ಯು ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಊರ್ಧ್ವತ್ರಿಕೋಣೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

5. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನೂ ಗಣಿಸಿರಿ.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{10}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{6}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{8}$

6. **ಕೆಳಗಿನಂತೆ** ಆಗಿರಲಿ;

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O_1 \\ O_2 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & O_1 \\ O_2 & B_2 \end{bmatrix}.$$

ಇಲ್ಲಿ A_1 ಮತ್ತು B_1 ಗಳು $k \times k$ ಗಳಾಗಿವೆ. A_2 ಮತ್ತು B_2 ಗಳು $(n-k) \times (n-k)$ ಗಳಾಗಿವೆ, 0_1 ಯು $k \times (n-k)$ ಸೊನ್ನೆ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ, ಮತ್ತು 0_2 ಯು $(n-k) \times k$ ಸೊನ್ನೆ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ, ಹಾಗಾದರೆ

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 & O_1 \\ O_2 & A_2B_2 \end{bmatrix}.$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಇದು ಅಭ್ಯಾಸ 27 ರ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಪ್ರಸಂಗವಾಗಿದೆ.

7. ಪ್ರಮೇಯ 12 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿವೆ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ. ಮಾತೃಕೆಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ವ್ಯಸ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು (31) ರಿಂದ (36) ರ ವರೆಗಿನ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 8 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 6 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

8. ಮುಂದಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಿಗೆ, ಗುಣಲಬ್ಧದ ವಿಲೋಮ ಅಸ್ತಿತ್ವ

ವಲ್ಲಿರುವುವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ. ಅದು ಇದ್ದರೆ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ,

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

9. A ಯು ಒಂದು $n \times n$ ಊರ್ಧ್ವತ್ರಿಕೋನೀಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಕೇವಲ $i = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ $A_{ii} \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ A ಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. A ಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ A^{-1} ಯು ಊರ್ಧ್ವತ್ರಿಕೋನೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

10. ಅಜ್ಞಾತಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಗಳು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯಗಳಾಗಿವೆ ?

(a) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & a^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \lambda - & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

11. $A^2 + 2A + I = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ A ಯು ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ, A ಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು A^{-1} ಗೆ ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಎಲ್ಲ 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳು B ಗೆ, $AB = BA$ ಆಗಿರುವಂತೆ A ಯು

ಒಂದು 2×2 ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ a ಗೆ $A=aI$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

13. ಎಲ್ಲ ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ 2×2 ಮಾತೃಕೆ B ಗಳಿಗೆ $AB=BA$ ಆಗಿರುವಂತೆ A ಯು ಒಂದು 2×2 ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. A ಯು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿರಲೇಬೇಕೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

14. ಒಂದು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯು ಭಾಗ 1 ರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಂತಹ ಒಂದು ಬಿಡಿ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು I ಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ I ನಿಂದ ಪಡೆದ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

(a) ಕೇವಲ 2×2 ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕೆಳಗಿನ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ,

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & a\end{bmatrix}, \qquad a\neq 0$$

ಅಥವಾ

$$\begin{bmatrix}a & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \qquad a\neq 0$$

ಅಥವಾ

$$\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}, \text{ ಅಥವಾ } \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

(d) ಭಾಗ (a) ಯ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(c) ಒಂದು $m\times n$ ಮಾತೃಕೆ A ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು A ಯ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅನುಗುಣವಾದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ನೆರವೇರಿಸಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(d) ಒಂದು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯ ವಿಲೋಮವು ಮತ್ತೆ ಒಂದು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(e) ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯು, ಅದು ಕೇವಲ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ :** ಒಂದು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಲು ಭಾಗ (c), (d) ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ (12) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

15. ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯ ಜಾಡನ್ನು ಮಾತೃಕೆಯ ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ದಾಖಲಾತಿಗಳ ಮೊತ್ತವೆಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಇದನ್ನು $tr(A)$ ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ $tr(A) = A_{11} + A_{22} + \cdots + (A)_{nn}$

(a) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) $tr(aA) = a\,tr(A)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(c) $tr(AB) = tr(BA)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(d) P_0 ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ $tr(P_0AP_0^{-1}) = tr(A)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(e) T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರುವಲ್ಲಿ (V ಸಾಂತ ಆಯಾಮೀಯ) ನಾವು $tr(T)$ ಯನ್ನು $tr(A)$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು A ಯು ಯಾವ ಆಧಾರಕ್ಕಾದರೂ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $tr(T)$ ಯು ಆಧಾರದ ಆಯ್ಕೆಯಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿದೆ.

(f) $AB - BA$ ಯು I ಗೆ ಎಂದಿಗೂ ಸಮವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

16. ಕೆಳಗಿನ V ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ, ದತ್ತಕ್ರಮಪಡಿಸಿದ ಆಧಾರ D-ಸಾಪೇಕ್ಷ x ಸದಿಶದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) V ಯು $ax + by + cz$ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ. (ನೋಡಿ ಅಭ್ಯಾಸ 2. ಭಾಗ 3) $X = 3x + 7y - 6z$, $D = \{x, y, z\}$

(b) V ಯು 2×2 ವಾಸ್ತವಿಕ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ (ಅಭ್ಯಾಸ 2, ಭಾಗ 3 ನೋಡಿರಿ.)

$$X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$D=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

(c) $i=1, 2, 3$ ಮತ್ತು $j=1, 2, 3$ ಗೆ $A_{ij}=A_{ji}$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯು 3×3 ವಾಸ್ತವಿಕ ಮಾತೃಕೆಗಳು $A=(A_{ij})$ ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ. (V ಯಲ್ಲಿನ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಅದಿಶ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಭಾಗ 4 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.)

$$X=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

(d) $i=1, 2, 3$ ಮತ್ತು $j=1, 2, 3$ ಗೆ, $(A_{ij}=-A_{ji}$ ಆಗಿರುವಂತೆ $A=(A_{ij})$ ವಾಸ್ತವಿಕ 3×3 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯು V ಆಗಿದೆ. [ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಅದಿಶ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಭಾಗ (c) ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ.]

$$X=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D=\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

17. V ಯು ಅಭ್ಯಾಸ 16 (c) ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. ಅಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ

ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ನಿರವಲಂಬಿತ ವಾಗಿವೆ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

(a) $\left\{\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&3&0\\1&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\right\}$

(b) $\left\{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\right\}$

(c) $\left\{\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&3&2\\3&2&1\\2&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&2&0\\2&0&-2\\0&-2&-2\end{bmatrix}\right\}$

18. V ಯು ಅಭ್ಯಾಸ 16 (d) ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. ಅಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿರುವುವು ಯಾವುದೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

(a) $\left\{\begin{bmatrix}1&1&2\\-1&0&0\\-2&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&3&1\\-3&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\right\}$

(b) $\left\{\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&3\\-2&-3&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&-2\\-1&0&3\\2&-3&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&-3\\-2&3&0\end{bmatrix}\right\}$

19. V ಯು ಅಭ್ಯಾಸ 16 (a) ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. T ಯು $T(ax+by+cz)=(a-3b)\,x+(b-2c)\,y-z$ ನಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ V ಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ $\{x, y, z\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿರುವ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. V ಯು ಅಭ್ಯಾಸ (16) (c) ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. T ಯು $TA=AB+BA$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟು,

$$B=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\1&0&3\end{bmatrix}$$

ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, V ಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. ಅಭ್ಯಾಸ 16 (c)ಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. V ಯು ಬಾಣಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. 1 ಉದ್ದದ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ $\{i, j, k\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ.

(a) ಆಧಾರ $(3i+j,\ j-k,\ i+j)$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ $3i+2j-k$ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) $Ti=3i,\ Tj=i+j,\ Tk=k$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ V ಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು T ಆಗಿರಲಿ. (i, j, k) ಗೆ ಮತ್ತು $(3i+j,\ j-k,\ i+j)$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿರುವ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. (a) ಈ ಬಹುಪದಿಗಳು

$$\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{-6},\qquad \frac{t(t-2)(t-3)}{2},$$
$$\frac{t(t-1)(t-3)}{2},\qquad \frac{t(t-1)(t-2)}{6}$$

ಸ್ತರ ≤ 3 ರ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : $(1, t, t^2, t^3)$ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಈ ಬಹುಪದಿಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.]

(b) ಭಾಗ (a) ಯ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ $1+t+t^2+t^3$ ನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(c) T ಯು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ.

$$Tf=f(0)\frac{t(t-2)(t-3)}{2}+f(1)\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{6}$$
$$+f(2)\frac{t(t-1)(t-2)}{6}+f(3)\frac{t(t-1)(t-3)}{2}.$$

ಭಾಗ (a) ಯ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತು ಆಧಾರ $(1, t, t^2, t^3)$ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿರುವಂತೆ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

23. (51) ನ್ನು ಅಥವಾ (52) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಆಧಾರ $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ಕೆಳಗಿರುವ ಸದಿಶಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ನಿರ್ದೇಶಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[**ಸೂಚನೆ** :(67) ನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿರುವ ಕೊನೆಯ ಟೀಕೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.]

(a) $(3, 2, -1)$ (b) $(-1, 1, 2)$

(c) $(6, 0, -1)$ (d) $(0, 0, 1)$

24. ಅಭ್ಯಾಸ (23) ರ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[**ಸೂಚನೆ** : (56) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(a) $T(x, y, z) = (x, -y, z, 0)$

(b) $T(x, y, z) = (x, x+y, x+y+z)$

(c) $T(x, y, z) = (2x+y-3z, 3y-3z, 0)$

25. V ಯು ಅಭ್ಯಾಸ 16 (d) ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಸ್ತರ ≤ 3 ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯು W ಆಗಿರಲಿ. T ಯು V ಯಿಂದ π ಗೆ ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ.

$$T\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} = at + bt^2 + ct^3$$

(a) ಈ ಆಧಾರಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿರುವಂತೆ T ಯ ಮಾತೃಕೆ

ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\left\{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\right\}$$

ಮತ್ತು

$$\{1, t, t^2, t^3\}$$

(b) ಈ ಆಧಾರಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿರುವಂತೆ T ಯ ಮಾತೃಕೆ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\left\{\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\right\}$$

ಮತ್ತು

$$\left\{\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{-6}, \frac{t(t-2)(t-3)}{2}, \frac{t(t-1)(t-3)}{-2}, \frac{t(t-1)(t-2)}{6}\right\}$$

26. V ಯಿಂದ W ಗೆ T ಯು ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ. V ಮತ್ತು W ಗಳು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರಲಿ. $A = (A_{ij})$ ಯು ಮುಂದಿರುವ ಆಧಾರಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $i \neq j$ ಮತ್ತು $A_{ij} = 1$. ಇದು $i \leq$ ಸ್ಥಾನ (T) ಗೆ ಆಗಿದ್ದರೆ $A_{ij} = 0$ ಎಂದೂ, $i \geq$ ಸ್ಥಾನ (T) ಆಗಿದ್ದರೆ, $A_{ij} = 0$ ಎಂದೂ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಇದೆ ಎಂದೂ ಮತ್ತು W ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರ $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^m\}$ ಇದೆ ಎಂದೂ ತೋರಿಸಿ. [**ಸೂಚನೆ :** ಪ್ರಮೇಯ 8 ರ ಸಾಧನೆ ಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಆಧಾರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

27. $A = \begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. AB ಯ ಗಣನೆಯನ್ನು A ಮತ್ತು B

ಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿರುವಂತೆ ಸೂಕ್ತವಾಗಿ 'ಉಪಮಾತೃಕೆ' ಗಳಿಗೆ 'ಉಪ-ಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ' ಹೀಗೆ ಬರೆಯಿರಿ.

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [1 \;\; 2] & [1] \end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } \qquad B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ [0 \;\; 0] & [1] \end{bmatrix}$$

ಆಗ

$$AB = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}[0 \;\; 0] & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}[1] \\ [0 \;\; 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + [1][1 \;\; 2] & [0 \;\; 0] \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [1][1] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix} \\ [1 \;\; 2] & [8] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

(ಮೇಲೆ '=' ಎಂಬುದರ ಉಪಯೋಗವು ಅಷ್ಟು ಉಚಿತವಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, A ಯು ದಾಖಲಾತಿಗಳು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಬಹುದಾದ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [1 \;\; 2] & [1] \end{bmatrix}$$

ಎನ್ನುವುದರ ದಾಖಲಾತಿಗಳು ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. ಇದು ಗೊಂದಲಕ್ಕೆ ಕಾರಣವಾಗಬಾರದು.)

ನಾವು

$$A'_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A'_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A'_{21} = [1 \;\; 2], \quad A'_{22} = [1]$$

$$B'_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B'_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B'_{21} = [0 \;\; 0], \quad B'_{22} + [1]$$

ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ

$$A = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } \qquad B = \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} \\ B'_{21} & B'_{22} \end{bmatrix}$$

ಎಂದು ಬರೆದೆವು ಆಗ,

$$AB=\begin{bmatrix} A'_{11}\,B'_{11} + A'_{12}\,B'_{21} & A'_{11}\,B'_{12} + A'_{12}\,B'_{22} \\ A'_{21}\,B'_{11} + A'_{22}\,B'_{21} & A'_{21}\,B'_{12} + A'_{22}\,B'_{22} \end{bmatrix}$$

ಈ ವಿಧಾನದ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು **ಕೂಟರೂಪ ಗುಣಾಕಾರ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದು ಮೇಲಿರುವ A'_{12} ಅಥವಾ B'_{11} ನಂತಹ ಸರಳ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕಾಣಿಸಿಕೊಂಡಾಗ ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ. ನಾವು A ಯನ್ನು, ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ನೀಟಸಾಲುಗಳ ಮಧ್ಯೆ **ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಈ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಧಾನವು ಸಾಧಾರವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ A ಯ ನೀಟಸಾಲು ಮತ್ತು B ಯ **ಅಡ್ಡ ಸಾಲು** ವಿಭಜನೆಗಳು **ಏಕೀಭವಿಸಬೇಕು.** ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಳಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ವಿಭಜಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮತ್ತು ಸೂಚಿತ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕೂಟರೂಪ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗಣನೆ ಮಾಡಿರಿ.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2$

28. ಒಂದು 3×3 ಮಾತೃಕೆಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಮತ್ತು ಅವರ ವ್ಯಸ್ತವನ್ನು ಗಣಿಸಲು ಒಂದು ಪ್ರವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

ಭಾಗ 1 ಮತ್ತು 2 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಕುಚನೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಗಾಸ್ (Gauss) ವಿಸರ್ಜನಾ ವಿಧಾನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಭಾಗ 2 ರ ಅಭ್ಯಾಸ 9 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಈ ವಿಧಾನದ ಸಂಯೋಜನೆಯನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ (Crout)ಕ್ರೌಟ್ ವಿಧಾನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳ ಮತ್ತು ಇತರ ವಿಧಾನಗಳ ಹೆಚ್ಚಿನ ಚರ್ಚೆಗೆ Faddeeva [8] ಮತ್ತು Lanczos [19 ಅಧ್ಯಾಯ 2,] ಗ್ರಂಥ ನೋಡಿರಿ. ಅಡ್ಡಸಾಲು ಸಂಕುಚಿಸಿದ ಸೋಪಾನ ವ್ಯೂಹರೂಪವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ವಿವರವಾಗಿ Hoffman ಮತ್ತು Kunze ನಲ್ಲಿ [14, ಅಧ್ಯಾಯಗಳು 1 ಮತ್ತು 2] ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಸಾಂತ ಮತ್ತು ಅನಂತ ಆಯಾಮೀಯಗಳೆರಡರದೂ ನಿರಂಕುಶ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಪ್ರಪೂರ್ಣ ಸಂಸ್ಕರಣವನ್ನು Jacobson (15)ನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅಂಥ ಅವಕಾಶಗಳ ಮೇಲೆ ರೇಖೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು Jacobson (15)ಮತ್ತು Halmos [13, ಅಧ್ಯಾಯ 2] ಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಮೇಲೆ ಗಣನೆಗೂ ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದಕ್ಕೂ ಸಹಾಯಮಾಡಲು ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಮಾತೃಕೆಗಳು ಇತರ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಸಹಾಯಕವಾಗಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಕೆಲವು ಉಪಯೋಗಗಳಿಗೆ Guillimin ರ ಗ್ರಂಥ [12, ಅಧ್ಯಾಯ 10] ನೋಡಿರಿ. **ಅವಕಲ** ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಅನ್ವಯಗಳಿಗೆ Kaplan ರ ಗ್ರಂಥ [16, ಅಧ್ಯಾಯ 6] ನೋಡಿರಿ ಮತ್ತು ಹೆಚ್ಚು ಮುಂದುವರಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ Gantmacher ರ ಗ್ರಂಥ [11] ನೋಡಿರಿ.

ಅನಂತ ಆಯಾಮೀಯ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಮೇಲೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು ಅನೇಕ ಭೌತಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲೂ ಉದಯಿಸುತ್ತವೆ. ಲಾಪ್ಲೇಸ್ ಪರಿವರ್ತನೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವ ಇಂಥ ಒಂದರ ಒಂದು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಸಂಸ್ಕರಣಕ್ಕೆ Churchill

ಗ್ರಂಥವನ್ನು [3] ನೋಡಿರಿ. ಸಾಮಾನ್ಯ ಮತ್ತು **ಆಂಶಿಕ ಅವಕಲ** ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮತ್ತು ಬಹುಬೈಜಿಕ ಸಂಸ್ಕರಣವನ್ನು **Erdelyi** ಗ್ರಂಥ (7) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಒಂದು ಸದೃಶ ಮತ್ತು ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಪೂರ್ಣ **ಅಧ್ಯಯನವು** **Friedman** (10) ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿದೆ.

* ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪುಸ್ತಕದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಆಧಾರ ಗ್ರಂಥಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಅಧ್ಯಾಯ 2

ಉದ್ದ, ಕೋನ ಮತ್ತು ಗಾತ್ರ

ಭಾಗ 1. ಮೂರು ಆಯಾಮಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಂದು ಗುಣಲಬ್ಧ

ಅಧ್ಯಾಯ 1 ರಲ್ಲಿ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಬೈಜಿಕ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸಲಾಯಿತು. ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು, ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳನ್ನು, ಆಯಾಮ, ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು ಮತ್ತು ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಯಿತು. ಈ ಎಲ್ಲ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಸದಿಶಗಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡೇ ಸಂಸ್ಕರಿಸಲ್ಪಟ್ಟದ್ದು. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಉದ್ದ, ಕೋನ ಮತ್ತು ಗಾತ್ರಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಕೋನವನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಸ್ಕರಿಸಲು ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಪ್ರಸಂಗವನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲಿದ್ದೇವೆ. ಭಾಗ 2 ರಲ್ಲಿ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ಪರಿಚಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಭಾಗ 3, 4 ಮತ್ತು 5 ರಲ್ಲಿ ಲಂಬತ್ವ, ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳು ಮತ್ತು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಹೆಚ್ಚಿನ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ. 6 ಮತ್ತು 7 ನೇ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಮತ್ತು ಗಾತ್ರವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗುವುದು.

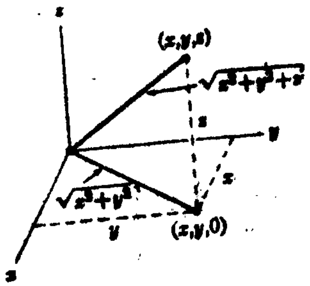
V ಯು ಬಾಣಗಳ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ, ಉದ್ದ 1 ಹೊಂದಿರುವ ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. $\{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು V ಯಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು R^3 ಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. (ಇದನ್ನು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದೆ) $v = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ಆಗಿರಲಿ ಆಗ ಪೈಥಾಗೋರನ ನಿಯಮವನ್ನು

ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ

v ಯ ಉದ್ದವು $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ಆಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ-1 ನೋಡಿರಿ)

v ಯ ಉದ್ದವನ್ನು $|v|$ ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುವುದರಿಂದ

$|v| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ಎಂದು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. $|v|$ ಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ಹೀಗಿವೆ,



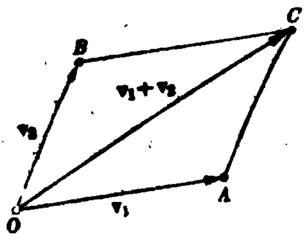
ಚಿತ್ರ-1

(a) $v \neq 0$ $|o| = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $|v| > 0$.

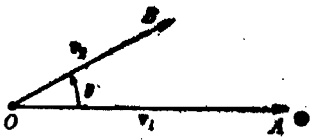
(1) (b) ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ aಗೆ $|av| = |a|\,|v|$

(c) $|v_1 + v_2| \leq |v_1| + |v_2|$

ಗುಣಧರ್ಮ (1 c) ಇದನ್ನು 'ತ್ರಿಕೋನ ಅಸಮತೆ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣರೇಖೆಯು ಉದ್ದದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿಲ್ಲವೆಂದು ಅಥವಾ ಬೇರೆ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿಗಿಂತ ಕಡಮೆಯಿಲ್ಲವೆಂದು ಈ ಗುಣಧರ್ಮವು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಈ ಅಸಮತೆಯ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ ಬಿಡಲಾಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ-2 OC ಯ ಉದ್ದಳತೆ $AO+AC$ ಯ ಉದ್ದಳತೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿಲ್ಲ



ಚಿತ್ರ-3

ಉದ್ದದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯು **ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿಲ್ಲ**; ಅಂದರೆ $|av + av_2|$ ಯು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ $a|v_1| + b|v_2|$ ಗೆ **ಸಮವಾಗಿಲ್ಲ.** ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

(2) $|v_1+v_2|=|v_1|+|v_2|$ ಇದು ಕೇವಲ $v_1=av_2$, $a\geq\theta$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

v_1 ಮತ್ತು v_2 ಗಳು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಅನ್ಯಸದಿಶಗಳಾಗಿರಲಿ. v_1 ಮತ್ತು v_2 ಗಳ **ನಡುವಣ ಕೋನವನ್ನು** ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ; 0 ಯು v_1 ಮತ್ತು v_2 ಗಳ ಆದ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ, A ಯು v_1 ನ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು B ಯು v_2 ನ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ v_1 ಮತ್ತು v_2 ಗಳ ನಡುವಿರುವ ಕೋನ AOB ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ–3 ನೋಡಿರಿ). ಇದನ್ನು θ ಮತ್ತು π ನಡುವಣ ಕೋನ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ; ಅಂದರೆ θ ವು v_1 ಮತ್ತು v_2 ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $2\leq\theta\leq\pi$

ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರಬೇಕು.

(3) v_1 ಮತ್ತು v_2 ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನ θ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು θ_1 ವು v_1 av_2 ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $a>\theta$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\theta=\theta_1$ ಮತ್ತು $a<0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\theta=\pi-\theta_1$.

ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಿಕೆ (3)ರಿಂದ $a>1$ ಆಗಿದ್ದರೆ $(\cos\theta=\cos\theta_1)$ ಮತ್ತು $a<0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\cos\theta=-\cos\theta_1$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿರುವ ಮಹತ್ವದ ಫಲಿತಾಂಶವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

(4) v ಮತ್ತು v_1 ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವು θ_1 θ_2 ವು v ಮತ್ತು v_2ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನ ಮತ್ತು θ_3 ಯು v ಮತ್ತು v_1+v_2ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$|v_1+v_2|\cos\theta_3=|v_1|\cos\theta_1+|v_2|\cos\theta_2$$

(4) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಒಂದು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ. (4) ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಗುಣಧರ್ಮವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ! (4) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರ ಬದಲು ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು. v_1 ಮತ್ತು v_2 ಗಳು. V ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, v_1 ಮತ್ತು v_2 ಗಳ **ಬಿಂದುಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು**, θ ವು. v_1 ಮತ್ತು v_2 ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, $|v_1|\,|v_2|\cos\theta$ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು

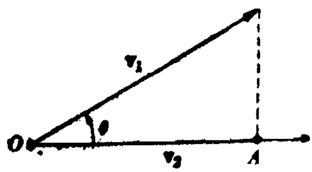
ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಇದನ್ನು $v_1\, v_2$ ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ ಅಂದರೆ,

(5) $v_1\, v_2 = |v_1|\, |v_2| \cos\theta$, ಇಲ್ಲಿ θ ವು v_1 ಮತ್ತು v_2 ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವಾಗಿದೆ.

(5) ನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಹೇಗೆ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ? $v_1\, v_2$ ವನ್ನು v_1 ಅನ್ನು v_2 ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿ ಪ್ರಲಂಬಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಈ ಉತ್ಕ್ಷೇಪ ಉದ್ದದ $|v_2|$ ರಷ್ಟು $1 \leq \theta < \pi/_2$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಒಂದು ಧನಚಿನ್ಹೆಯೊಡನೆಯೂ, $\pi/_2 < \theta \leq \pi$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಒಂದು ಋಣಚಿನ್ಹೆಯೊಡನೆಯೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ, ದೊರಕಿಸುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರ 4 ನೋಡಿರಿ).

v_1 ಅಥವಾ v_2 ಎರಡರಲ್ಲೊಂದು 0 ಆಗಿದ್ದರೂ ನಾವು $v_1\, v_2$ ಯನ್ನು 0 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಬಿಂದುಗುಣಲಬ್ಧದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ಹೀಗಿವೆ,

(6)
(a) $v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1$
(b) $v \cdot (av_1 + bv_2) = av \cdot v_1 + bv \cdot v_2$,
(c) $(av_1 + bv_2) \cdot v = av_1 \cdot v + bv_2 \cdot v$,
(d) $v \cdot v > 0$ ಇದು $v \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ



ಚಿತ್ರ-4 AO ಯ ಉದ್ದವು $|v| \cos\theta|$ ಆಗಿದೆ.

(6a) ಗುಣಧರ್ಮವು (5) ರಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ (6b) ಮತ್ತು (6c) ಗಳು (3), (4) ಮತ್ತು (5) ರ ಪರಿಣಾಮಗಳಾಗಿವೆ. (6d) ಗುಣಧರ್ಮವು $v \cdot v = |v|^2 \cos\theta = |v|^2$ ನಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

(6b) ಗುಣಧರ್ಮವು v ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವಾಗ, $v \cdot w$ ಯು V ಯಿಂದ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಗುಣಧರ್ಮ (6c) ಯು vಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವಾಗ, $w \cdot v$ ಕೂಡಾ vಯಿಂದ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಬಿಂದು ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವಾಗ, ಇನ್ನೊಂದು ಚರಾಂಕದ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ್ನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಬೈಜಿಕ ಗುಣಧರ್ಮವು ನಮ್ಮ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅನೇಕ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಬಿಂದುಗುಣಲಬ್ಧದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

(a) $|v| = (v \cdot v)^{\frac{1}{2}}$

(7) (b) $0 \leq \theta \leq \pi$ ಮತ್ತು $\cos \theta = \dfrac{v \cdot v_2}{|v_1|\ |v_2|}$ ಆಗಿರುವಂತೆ

v_1 ಮತ್ತು v_2ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವು θ ಆಗಿದೆ.

ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಎರಡು ಸದಿಶಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವನ್ನು ಬಿಂದುಗುಣಲಬ್ಧ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಬಹುದು. ಇನ್ನೂ ಅನೇಕ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನು ಬಿಂದುಗುಣಲಬ್ಧದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

v_2 ಗೆ v_1 ಲಂಬವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ v_1 ಮತ್ತು v ಳ ನಡುವಣ ಕೋನವು $\pi/2$ ಆಗಿದೆ. ನಾವು $v_1\ v_2 = 0$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸ ತ್ತೇವೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ $v_1\ v_2 = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $|v_1|\ |v_2| \cos \theta = ($ ೀಗೆ $v_1 = 0$ ಅಥವಾ $v_2 = 0$ ಅಥವಾ $\theta = \pi/2$. 0 ಯು ಬೇರೆ ಯಾವುದೆ ದಿಶಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎನ್ನುವ ಪರಿಭಾವನೆಯನ್ನು ನಾವು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದರೆ, ಆಗ ನಾವು ಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

(8) v_1 ಮತ್ತು v_2 ಗಳು ಕೇವಲ ಲಂಬಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $v^1 \cdot v_2 = 0$.

v_1 ಮತ್ತು v_2 ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನ θ ಇರಲಿ ಮತ್ತು v_1 ಇದರ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ v_2 ಯ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವರೆಗಿನ ಅಂತರ d ಇರಲಿ. ಕೋಟಿಜ್ಯಾ ನಿಯಮದಿಂದ

(9) $d^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 - 2|v_1|\ |v_2| \cos \theta$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$d = |v_1 - v_2|$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ನಾವು (5) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ (9) ನ್ನು ಹೀಗೆ ಪುನಃ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು

(10) $|v_1 - v_2|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 - v_1\ v_2$.

ಇದನ್ನು (5), (6) ಮತ್ತು ($7a$) ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು. ಇದರಿಂದ

$$|v_1 - v_2|^2 = (v_1 - v_2) \cdot (v_1 - v_2) = v_1 \cdot v_1 - 2v_1 \cdot v_2 + v_2 \cdot v_2$$
$$= |v_1|^2 + |v_2|^2 - 2\ v_1 \cdot v_2.$$

ಇಂಥಹದೇ ಇನ್ನೊಂದು ಗಣನೆಯಿಂದ

(11) $|v_1 - v_2|^2 + |v_1 + v_3|^2 = 2|v_1|^2 + 2|v_2|^2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

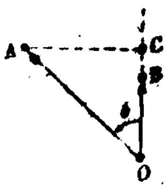
ಇದು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಈ ಕಾರಣಕ್ಕಾಗಿ, (11)ವನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ **ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಿಯಮ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಬಿಂದು ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉದ್ದದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು

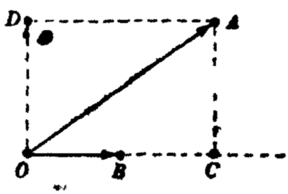
(12) $v_1 \cdot v_2 = \frac{1}{4}|v_1 + |\frac{1}{4}v_2|^2 - \frac{1}{4}|v_1 - v_2|^2$.

ಇದನ್ನು ಧ್ರುವೀಕರಣ ಸಾಮ್ಯಕ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು $|v_1 + v_2|^2$ ಮತ್ತು $|v_1 - v_2|^2$ ಗಳನ್ನು ಬಿಂದು ಗುಣಲಬ್ಧದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸುವುದರಿಂದ ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ಸದಿಶದ ಪ್ರಲಂಬನ ಇನ್ನೊಂದರ ಮೇಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಬಿಂದುಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. v ಯು ಉದ್ದ 1 ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ v ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿರುವ v_1 ನ ಪ್ರಲಂಬನ $(v_1 \cdot v)$ vಗೆ ಸಮವಾಗಿದೆ. [(ಚಿತ್ರ 5 ನೋಡಿರಿ) OB ಯು ಉದ್ದ 1 ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು AC ಯು OC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $OC = (|\vec{OA}| \cos \theta)$ $\vec{OB}$]



ಚಿತ್ರ-5



ಚಿತ್ರ-6

$v \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $v/|v|$ ಯು 1 ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. v ಗೆ ವ್ಯಾಪಿ

ಳ್ಳಾಗಿರುವ ಸ್ಪ್ರಲಂಬನ v ಯು ಉದ್ದದ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಬಾರದು. ಹೀಗೆ :

(13) vಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ v_1ನ ಪ್ರಲಂಬನ ಹೀಗಿದೆ $\left(v_1 \cdot \frac{v}{|v|}\right)\frac{v}{|v|}$.

ಹೀಗಿರಲಿ $w = v_1 - \left(v_1 \cdot \frac{v}{|v|}\right)\frac{v}{|v|}$

ಆಗ vಗೆ w ಲಂಬವಾಗಿರಬೇಕು. (ಚಿತ್ರ–6 ನೋಡಿರಿ. ಸದಿಶ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$ಯು $\overrightarrow{OB}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.)

ಗಣನೆಯು $w \cdot v = v_1 \cdot v - (v_1 \cdot v/|v|)\,(v/|v| \cdot v) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ ($\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}$ ಆಗಿರುವ ಚಿತ್ರ 6 ನೋಡಿರಿ.)

(14) $v \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $w_1 = (v_1 \cdot v)\, v/|v|^2$ ಯು v ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು $w = v_1 - (v_1 \cdot v)\, v/|v|^2$ ಯು v ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಲ್ಲಿ $v_1 = w + w_1$

$v_1 = w_2 + w_3$ ಆಗಿದ್ದರೆ $w_3 = av$ ಮತ್ತು $w_2 \cdot v = 0$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $v_1 \cdot v = (w_2 + w_3) \cdot v = w_2 \cdot v + av \cdot v$. ಹೀಗೆ $a = (v_1 \cdot v)/|v_1|^2$, $w_3 = w_1$ ಮತ್ತು $w_2 = w$. ಇದು v_1 ಯು vಗೆ ಒಂದು ಸದಿಶಲಂಬದ ಮತ್ತು v ಗೆ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಾಂತರದ ಮೊತ್ತದಂತೆ ಒಂದು ಏಕೈಕ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. w_1 ಸದಿಶವನ್ನು v ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ v_1 ನ **ಘಟಕ** ಎಂದು ಮತ್ತು w ಸದಿಶವನ್ನು v ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ v_1 ನ **ಘಟಕ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಈಗ $\{i, j, k\}$ ಯು ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ 1 ಉದ್ದದ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿದ್ದು vಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. $v_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ ಮತ್ತು $v^2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

(15) $v_1 \cdot v_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

ಇದನ್ನು $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$, $i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಮತ್ತು (6) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು.

ನಾವು R^3 ನಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು (**ಅಥವಾ ಶಿಷ್ಟ ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು**) ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲು (15) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

(16) $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$

R_2 ನಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು (ಅಥವಾ ಶಿಷ್ಟ ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು)

(17) $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$ ದಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಇವು ಕೆಳಗಿರುವ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ,

(18)

(a) $X \cdot Y = Y \cdot X+,$

(b) $X \cdot (ay + bz) = aX \cdot Y + bX \cdot Z,$

(c) $(aX + bY) \cdot Z = aX \cdot Z + bY \cdot Z,$

(d) $X \cdot X > 0$ ಇದು $X \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

(18) ರಲ್ಲಿ X, Y ಮತ್ತು Z ಗಳು R^3 ನಲ್ಲಿರುವ (ಅಥವಾ R^2 ನಲ್ಲಿರುವ) ಚುಕ್ಕೆಗಳನ್ನು (16) ರಿಂದ ಅಥವಾ (17) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಬಿಂದುಗುಣಲಬ್ಧದೊಡನೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ. ನಾವು R^3 ಮೇಲಿನ (ಅಥವಾ R^2 ಮೇಲಿನ) ಬಿಂದುಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಈ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಕೋನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $X = (3, 1, 2)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $|X| = (X \cdot X)^{1/2} = (3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2)^{1/2} = 14^{1/2}$. $Y = (1, 1, -6)$, ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ θವು X ಮತ್ತು Y ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವಾಗಿದೆ; ಇಲ್ಲಿ

$$\cos\theta = \frac{X \cdot Y}{|X||Y|} = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-6)}{(14)^{1/2}(38)^{1/2}} = \frac{-8}{(14 \cdot 38)^{1/2}}.$$

$X^1 \cdot X^2 = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ X^2 ಗೆ X^1 **ಲಂಬವಾಗಿದೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ $(1, 1)$ಗೆ $(1, -1)$ ಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ. (6) ಮತ್ತು $(7a)$ ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದ್ದ (10), (11) ಮತ್ತು (12) ರ ಸೂತ್ರವಿಧಿಗಳು ಈ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ. [(18) ನ್ನು ಮತ್ತು $[X]$ ನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ.]

(19)

(a) $|X-Y|^2=|X|^2+|Y|^2-2X\cdot Y$

(b) $|X-Y|^2+|X+Y|^2=2|X|^2+2|Y|^2$

(c) $X\cdot Y=\frac{1}{4}|X+Y|^2-\frac{1}{4}|X-Y|^2$

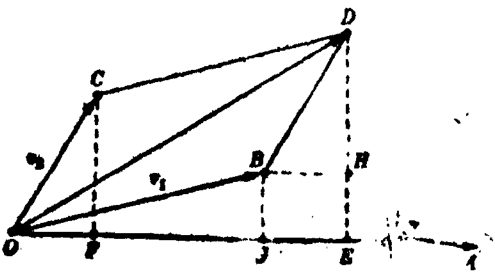
Y ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ X ನ ಘಟಕ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ Y ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ X ನ **ಉತ್ಕ್ಷೇಪವನ್ನು** $(X\cdot Y)\, Y/|Y|^2$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗಿದೆ. Y ಗೆ **ಲಂಬವಾಗಿರುವ** X ನ ಘಟಕವು $X-(X\cdot Y)Y/|Y|^2$ ಆಗಿದೆ.

$X=(3,\ 1,\ 2)$ ಮತ್ತು $Y=(1,\ 1,\ -6)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ Y ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ X ನ ಘಟಕವು ಹೀಗಿದೆ :

$$[3\cdot1+1\cdot1+2\cdot(-6)]\frac{(1,1,-6)}{38}=-\tfrac{4}{19}(1,1,-6)$$

ಮತ್ತು Y ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ X ನ ಘಟಕವು ಹೀಗಿದೆ :

$$X-(-\tfrac{4}{19})(1,1,-6)=\tfrac{1}{19}(61,23,14).$$



ಚಿತ್ರ-7

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. (a) ಒಂದು ಲಂಬ ತ್ರಿಭುಜದ ಇತರ ಎರಡೂ ಬಾಹುಗಳಿಗಿಂತ ಕರ್ಣ ಬಾಹುವು ಉದ್ದವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

   (b) (1 :) ಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ: ಚಿತ್ರ 2 ರಲ್ಲಿ O ಮತ್ತು A ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಿರುವ ರೇಖೆಗೆ C ಯಿಂದ ಒಂದು ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಸಿ

ಪೈಥಾಗೋರನ ನಿಯಮವನ್ನು ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸ 1 (*a*) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(c) (2) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(d) (4) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ: ಚಿತ್ರ 7 ರಲ್ಲಿ $OF = BH = GE$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

(e) (11) ನ್ನು, ಎರಡೂ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಬಿಂದುಗುಣಾಲಬ್ಧದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದರಿಂದ, ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(f) (12) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

2. $v_1 = 3i + j$, $v_2 = i - j + k$, $v_3 = 5i - 3j + 2k$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

(a) $v_1 + v_2$ (b) $v_1 \cdot 3v_3$

(c) $v_2 \cdot (v_1 - v_3)$ (d) $v_2 \cdot v_1 - v_2 \cdot v_3$

(e) $3v_1$ ಮತ್ತು $v_2 - 2v_1$ ಗಳ ಕೋನದ ಕೋಟಿಜ್ಯಾ.

(f) $v_2 - v_3$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ v_1 ನ ಘಟಕ.

(g) $|v_2 - v_1|^2 + |v_2 + v_1|^2$ (h) $|v_2|^2 + |v_1|^2$

(i) $6\,v_1$ ಮೇಲೆ v_2 ನ ಪ್ರಲಂಬನ.

(j) $3v_1$ ಮೇಲೆ v_2 ನ ಪ್ರಲಂಬನ

(k) $\{v_1, 5v_2 - 6v_1, 13v_3 - 18v_2 + 27v_1\}$ ಇದು ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಆಧಾರವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

3. ಕೆಲಸದ ಭೌತಿಕ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಿಂದುಗುಣಾಲಬ್ಧದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂತರ ಬಲವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಒಂದು ಸದಿಶವು F ಆಗಿದ್ದರೆ, ಈಗ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು v ಯು ಆದ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವಿನವರೆಗೆ v ಯ ಗುಂಟ ಚಲಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಲು ನಡೆದ ಕೆಲಸವು $F \cdot V$ ಆಗಿದೆ.

4. (a) ಕೇವಲ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಆ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು

ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು ಬಿಂದುಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪ ಯೋಗಿಸಿರಿ. (ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯು ಸಮೋದ್ದಿಷ್ಟ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.)

(b) $\{i, j, k\}$ ಯು ಉದ್ದ 1 ಹೊಂದಿರುವ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿದ್ದು v ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. v ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಮತಲವು M ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ ಆಯಾಮ 2 ರ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ರೂಪಾಂತರ ವಾಗಿರಲಿ. d ಯು 0 ಯಿಂದ M ಗಿರುವ ಅಂತರವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $y = ai + bj + ck$ ಯು M ಗೆ ಒಂದು ಸದಿಶ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. ಸಮತಲ M ನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\{i, j, k\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ($v_1 = xi + yj + zk$ ಯು ಅದರ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವನ್ನು M ನಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆಗ v ಗೆ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಯಾದ v_1 ನ ಪ್ರಲಂಬನ d ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.)

(c) v ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೆಯು L ಆಗಿರಲಿ, ಅಂದರೆ ಆಯಾಮ 1 ರ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ರೂಪಾಂತರ. v ಯು L ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\{i, j, k\}$ ಯು (b) ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇರಲಿ. L ನ ನಿರ್ದೇಶಾತ್ಮಕ ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು (v ಯ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ) v ಯು i, j ಮತ್ತು k ಗಳೊಡನೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳ ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳಾಗಿವೆ. $\{i, j, k\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

ಇಲ್ಲಿ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ಎನ್ನುವುದು ಕ್ರಮವಾಗಿ l, m ಮತ್ತು n ನಿರ್ದೇಶಾತ್ಮಕ ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳೊಡನೆ (x_0, y_0, z_0) ನ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(d) $\{i, j, k\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ (x_0, y_0, z_0) ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡು

ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಯು ಕೆಳಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಲಂಬ ವಾಗಿದೆ

$$Ax + By + Cz = D.$$

(e) $\{i, j, k\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ (x, y, z) ನಿಂದ (x_0, y_0, z_0) ಮತ್ತು (x_1, y_1, z_1) ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಿರುವ ರೇಖೆಗೆ ಇರುವ ಅಂತರಕ್ಕೆ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : $v = (x - x_0) i + (y - y_0) j + (z - z_0)k$ ಮತ್ತು $v_1 = (x_1 - x_0) i + (y_1 - y_0) j + (z_1 - z_0) k$ ಆಗಿರಲಿ. v_1 ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ v ಯ ಘಟಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.]

5. v_1, v_2 ಮತ್ತು v_3 ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮೂರು ಅಶೂನ್ಯ ಸದಿಶಗಳಾಗಿರಲಿ. $\{v_1, v_2, v_3\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. v_1 ಮತ್ತು v_2 ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ v ಯ ಪ್ರಲಂಬನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಭಾಗ–2 ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಮೇಲಿನ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು

ಭಾಗ 1 ರಲ್ಲಿ ನಾವು V ಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದೆವು ಮತ್ತು ಆನಂತರ ಈ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಾನಾ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿದೆವು. ಬಿಂದುಗುಣಲಬ್ಧವು ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ v_1 ಮತ್ತು v_2 ಜೋಡಿಗಳ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿತ್ತು.

(a) $v_1 \cdot v_1 = v_2 \cdot v_1,$

(1) (b) $v \cdot (av_1 + bv_2) = av \cdot v_1 + bv \cdot v_2,$

(c) $(av_1 + bv_2) \cdot v = av_1 \cdot v + bv_2 \cdot v,$

(d) $v \cdot v > 0$ ಇದು $v \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಭಾಗ 1 ರ (6) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಉದ್ದ, ಕೋನ ಮತ್ತು ಲಂಬತ್ವಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲು ಮತ್ತು ಭಾಗ 1 ರ ವಿವಿಧ ಸಾಮ್ಯಕಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳೇ (1) ಆಗಿವೆ.

V ಯು ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು (1) ಕ್ಕೆ ಸದೃಶವಾದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳ ಜೋಡಿಗಳಿಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಭಾಗ 1 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸಾಮ್ಯಕಗಳನ್ನೂ V ಗೆ ಕೊಂಡೊಯ್ಯಬಹುದು. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಹಾಗೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

V ಯು ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು **ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವು** V ಯಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳ ಜೋಡಿಗಳಿಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ, ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ (X, Y) ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.

(2)
(a) $(X, Y) = (Y, X)$,
(b) $(X, aY+bZ) = a(X, Y)+b(X, Z)$,
(c) $(aX+bY, Z) = a(X, Z)+b(Y, Z)$,
(d) $(X, X) > 0$ ಇದು $X \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

ಟೀಕೆಗಳು : (2) ರ ನಿಯಮಗಳು, $V = \mathrm{V}$ ಮತ್ತು $(\mathrm{v}_1 \cdot \mathrm{v}_2) = \mathrm{v}_1 \cdot \mathrm{v}_2$ ಆಗಿರುವ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ (1) ರ ನಿಯಮಗಳೇ ಆಗಿದೆ. (X, Y) ಅಂಕನವು ಬಹುಪಾಲು ಗಣಿತ ಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಶಿಷ್ಟವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಮಾತ್ರ ನಾವು $X \cdot Y$ ಗಿಂತ $(X \cdot Y)$ ಯನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಒಂದು **ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ**ವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಆದರೆ ಭಾಗ 1 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿಶೇಷ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದು ಗುಣಲಬ್ಧವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಗುಣಧರ್ಮ (2c) ಯು (2a) ಮತ್ತು (2b) ಗಳಿಂದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. (2) ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ಸೂಚ್ಯಕ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. (2a) ಇದನ್ನು **ಸಮಾಂಗತ** ಗುಣಧರ್ಮವೆಂದು, (2d) ಯನ್ನು **ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತ** ಗುಣಧರ್ಮವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. (2b) ಯಿಂದ X ಸ್ಥಿರವಾಗಿದ್ದರೆ ಅಥವಾ (2c) ಯಿಂದ Y ಸ್ಥಿರವಾಗಿದ್ದರೆ $(X \cdot Y)$ ಯು V ಯಿಂದ ವಾಸ್ತವಿಕಗಳಿಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿರುವಲ್ಲಿ (2b) ಮತ್ತು (2c) ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ದ್ವಿರೇಖೀಯತೆಯ ಗುಣಧರ್ಮವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಹಲವಾರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅನಂತರ ಭಾಗ 1 ರ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತೇವೆ.

R^3 ಮೇಲಿನ ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವು (ಬಿಂದುಗುಣಲಬ್ಧವೆಂಬ ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ)

(3) $((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಇದು ಭಾಗ 1 ರ (16), ಮತ್ತು (17) ರ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣವಾಗಿದೆ. (3) ರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉತ್ಪನ್ನವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ (2) ನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಲ್ಲದ R^2 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯು ಹೀಗಿದೆ:

(4) $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 x_2 + (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)$.

ನಾವು (x_2, y_2) ಯನ್ನು ಸ್ಥಿರಪಡಿಸಿದರೆ ಆಗ (4) ರ ಬಲಭಾಗವು ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿ (x_1, y_1) ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವುದರಿಂದ $(2c)$ ಯು ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ $(2b)$ ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಷ್ಟು ಅಲ್ಲದೆ $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 x_2 + (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = x_2 x_1 + (x_2 + y_2)(x_1 + y_1) = ((x_2, y_2), (x_1, y_1))$ ಆಗುವುದರಿಂದ $(2a)$ ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆ. ಗುಣಧರ್ಮ $(2d)$ ಯು $((x_1, y_1), (x_1, y_1)) = x_1 x_1 + (x_1 + y_1)(x_1 + y_1) = x_1^2 + (x_1 + y_1)^2$ ನಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

V ಯು ಎಲ್ಲ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ, $0 \leq$ ನಿಂದ $1 \leq 1$ ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. ಗಣನೀಯ ಮಹತ್ವದ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ

(5) $(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt$ ದಿಂದ

ಕೊಡಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಂಬಂಧವು (2) ನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆಂಬುದು ಅನುಕಲನ ಗುಣಧರ್ಮಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಯಾವುದಾದರೂ t_0 ಗೆ $f(t_0) \neq 0$ ಆಗಿರದಿದ್ದರೆ 0 ಕ

$t_0 \leq 1$, ಆಗ tಯು t_0ಗೆ ಹತ್ತಿರವಿದ್ದು $f(t)^2 > 0$ ಆಗುತ್ತದೆ

ಹೀಗೆ
$$(f, f) = \int_0^1 f(t)^2 dt > 0.$$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಇತರ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತವೆ.

(X, Y)ಯು Vಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ. ಸಾನೃಣಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ $(X, X)^{1/2}$ಯು Xನ **ಉದ್ದ** (ಅಥವಾ **ನಾರ್ಮ**) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ನಾವು ಇದನ್ನು $|X|$ ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ; ಅಂದರೆ,

(6) $$|X| = (X, X)^{1/2}$$

ಇದರಿಂದ, [ಭಾಗ 1 ರ (1) ರೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಿರಿ.]

(7)
(a) $|X| > 0$ $X \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ,
(b) aಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ $|aX| = |a|\,|X|$,
(c) $|X + Y| \leq |X| + |Y|$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$(7a)$ ಗುಣಧರ್ಮವು (6) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $(2d)$ ಯ ಮರುನಿರೂಪಣೆಯಾಗಿದೆ. ಗುಣಧರ್ಮ $(7b)$ ಯು $|aX| = (ax, ax)^{1/2} = (a^2)^{1/2} (x, x)^{1/2} = |a|\,|x|$ ಯಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. $(7c)$ ಈ ಗುಣಧರ್ಮವನ್ನು **ತ್ರಿಕೋನ ಅಸಮತೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ನಮಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಅಸಮತೆಯ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ :

(8) $$(X\ Y)^2 \leq |X|^2 |Y|^2.$$

ಇದನ್ನು **ಸ್ಕ್ವಾರ್ಜ್ ಅಸಮತೆ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. ಕೆಳಗಡೆ (8) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ $(7c)$ ಯನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು (8)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ $|X+Y|^2 = (X+Y, X+Y) = (X, X+Y) + (Y, X+Y) = (X, X) + (X, Y) + (Y, X) + (Y, Y) = |X|^2 + 2(X, Y) + |Y|^2 \leq |X|^2 + 2|X|\,|Y| + |Y|^2 =$

$(|X|+|Y|)^2$. ಮೊದಲನೆ ಸಮತೆಯು (6) ನ್ನು ಎರಡನೆಯದು (2b) ಯನ್ನು, ಮೂರನೆಯದು (2c) ಯನ್ನು, ನಾಲ್ಕನೆಯದು (2a) ಮತ್ತು (6) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಅಸಮತೆಯು (8) ರಿಂದ ಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಅಸಮತೆಯು ಸರಳ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾ ಅಂಕಗಣಿತವಾಗಿದೆ. $|X+Y|^2 \leq (|X|+|Y|)^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ (7c) ದೊರಕುತ್ತದೆ.

ಸ್ಕ್ವಾರ್ಜ್ ಅಸಮತೆಯು ಎರಡು ಸದಿಶಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲೂ ಅವಕಾಶ ಕೊಡುತ್ತದೆ. X ಮತ್ತು Y ಗಳು ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದಿದ್ದರೆ (8) ಕೆಳಗಿನದನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ:

(9) $$-1 \leq \frac{(X, Y)}{|X||Y|} \leq 1.$$

$\cos\theta = (X, Y) / |X||Y|$ ಆಗಿರುವಂತೆ, ಖಚಿತವಾಗಿ ಒಂದೇ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ θ, $0 \leq \theta \leq \pi$ ಇದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ θವು **X ಮತ್ತು Y ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನ** ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

$\theta = \pi/2$ ಆಗಿರುವ ವಿಶೇಷ ಪ್ರಸಂಗವು ಕುತೂಹಲಕಾರಿಯಾಗಿದೆ; ಏಕೆಂದರೆ ಆಗ $(X, Y) = 0$. θ ಯು ಯಾವುದೇ ಸದಿಶಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ ಆಗ ನಾವು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು. [ಭಾಗ 1 ರ (8) ನೋಡಿರಿ.]

(10) ಕೇವಲ $(X, Y) = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ X ಮತ್ತು Y ಗಳು **ಲಂಬ** ವಾಗಿದೆ.

ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ನಾವು ಒಂದು ಸದಿಶದ ಉದ್ದವನ್ನು ಎರಡು ಸದಿಶಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವನ್ನು ಮತ್ತು ಲಂಬತ್ವವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಒಂದು ಸದಿಶದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದರ **ಪ್ರಲಂಬನವನ್ನೂ** ಕೂಡ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಬಹುದು. [ಭಾಗ 1 ರ (13) ಮತ್ತು (14) ನ್ನು ನೋಡಿರಿ.] ಇದು ನಮ್ಮ ಮೂಲಭೂತ ಉಪಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 13. (X, Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ X ಮತ್ತು Y ಗಳು V ಯಲ್ಲಿರಲಿ ಮತ್ತು $Y \neq 0$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ V ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಸದಿಶ Z ಅನ್ನೂ ಮತ್ತು ಒಂದು

ಏಕೈಕ ಸಂಖ್ಯೆ a ಯನ್ನೂ ಕೆಳಗಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

(a) $X = aY + Z$
(b) $(Z, Y) = 0$

ಮತ್ತು $a = (X, Y)/|Y|^2$.

ಸಾಧನೆ: $X = aY + Z$ ಮತ್ತು $(ZY) = 0$ ಎಂದು ಇಟ್ಟು ಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $(X, Y) = (aY + z, Y) = a(Y, Y) + (Z, Y) + a|Y|^2$. ಹೀಗೆ $a = (X, Y)/|Y|^2$. ವಿಲೋಮವಾಗಿ, $a = (X, Y)/|Y|^2$ ಮತ್ತು $Z + X - aY$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $X = aY + Z$ ಮತ್ತು $(Z, Y) = (X - aY, Y) = (X, Y) - a(Y, Y) = (XY) - |Y|^2 \times [(X, Y)/|Y|^2] = 0$.

a ಯು ಪ್ರಮೇಯ 13 ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವಾಗ, aY ಸದಿಶವು, Y **ಮೇಲೆ X ನ ಪ್ರಲಂಬನ** ಅಥವಾ Y **ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ X ನ ಘಟಕ** ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಪ್ರಮೇಯ 13 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸದಿಶ Z ಅನ್ನು Y ಗೆ **ಲಂಬವಾಗಿರುವ X ನ ಘಟಕ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು.

ಟೀಕೆಗಳು: ಇವುಗಳನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸೋಣ. $(1, 0)$ ಮತ್ತು $(0, 1)$ ಸದಿಶಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು R^2 ಮೇಲಿನ ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಉದ್ದ 1 ನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. (4) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ $((1, 0), (0, 1)) = 1$; $|(1, 0)| = ((1, 0), (1, 0))^{1/2}$; $2^{1/2}$; ಮತ್ತು $|(0, 1)| = ((0, 1), (0, 1))^{1/2} = 1$. ಎಂದಿದೆ. ಹೀಗೆ $(1, 0)$ ಮತ್ತು $(0, 1)$ ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನ θ ದ ಕೋಟಿಜ್ಯಾವು, (4) ರ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿರುವುದು ಇಂತಿದೆ :

$$\cos \theta = \frac{((1,0), (0, 1))}{|(1, 0)|\,|(0, 1)|} = \frac{1}{2^{1/2}},$$

ಅಂದರೆ, $\theta = \pi/4$. ಇದೇ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡಲ್ಲಿ $(1, 0)$ ಯ ಘಟಕಗಳು ಹೀಗಿವೆ :

$$\frac{((1,0), (0, 1))}{|(0, 1)|^2}(0, 1) = (0, 1),$$

ಇದು $(0, 1)$ ಮತ್ತು $(1, 0) - (0, 1) = (1, -1)$ ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ, $(0, 1)$ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯು ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ಎಲ್ಲ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳೂ V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ದತ್ತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿ ಎಂದು ನೆನಪಿಸುತ್ತದೆ. V ಯ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತೊಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಉದ್ದ, ಕೋನ, ಮತ್ತು **ಪ್ರಲಂಬ** ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಕ್ಕೆ ದಾರಿಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸಲು ಒಂದು ಸಾಧನವನ್ನು ಅಂದರೆ, ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಒಂದು ಸಾಧನವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಈ ನಿಯೋಜಿತ ವಿನ್ಯಾಸವು ಒಂದು ಸಮಷ್ಟಿಯು ಹೊಂದಿರಬಹುದಾದ 'ಸ್ವಾಭಾವಿಕ' ವಿನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿಲ್ಲದೆ ಇರಬಹುದು. ಇತರ ಸಮಷ್ಟಿಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲು, V ಯಂತಹ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಬಗೆಗಿನ ಪ್ರತಿಭೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವ ಒಂದು ಸುಲಭ ವಿಧಾನವು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಮೂಲಕವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ (b) ರಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು $\sin 2\pi t$ ಮತ್ತು $\cos 2\pi t$ ಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ, ಏಕೆಂದರೆ

$$\int_0^1 \sin 2\pi t \cos 2\pi t \, dt = \int_0^1 \frac{\sin 4\pi t}{2} dt = 0.$$

$\sin 2\pi t$ ಯ ನಾರ್ಮ್ ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

$$\left(\int_0^1 (\sin 2\pi t)^2 dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 \frac{1-\cos 4\pi t}{2} dt\right)^{1/2} = \frac{1}{2^{1/2}}.$$

$\sin 2\pi t$ ಮೇಲಿನ $2 \sin \pi t + 4 \sin \pi t$ ಯ ಉತ್ಕ್ಷೇಪವು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

$$(2 \sin 2\pi t + 4 \sin 4\pi t, \sin 2\pi t) \cdot \frac{\sin 2\pi t}{1/2} = 2 \sin 2\pi t.$$

$\sin 2\pi t$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ $2 \sin 2\pi t + 4 \sin 4\pi t$ ಯ ಘಟಕವು $4 \sin 4\pi t$ ಆಗಿದೆ.

ಭಾಗ 1 ರ ಸಾಮ್ಯಕಗಳ (10), (11) ಮತ್ತು (12) ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

(11) $\qquad |X-Y|^2 = |X|^2 + |Y|^2 - 2(X, Y).$

ಭಾಗ 1 ರ (10) ರೊಂದಿಗೆ ಸದೃಶವಾಗಿ **ಇದನ್ನು ಕೋಟಿಜ್ಯಾ ನಿಯಮ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ $|X-Y|^2 = (X-Y, X-Y) = (X, X-Y) - (Y, X-Y) = (X,X) - (X,Y) - (Y,X) + (Y, Y) = |X|^2 - 2(X, Y) + |Y|^2$. ಹಾಗೆಯೇ **ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಿಯಮವನ್ನು** ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. [ಭಾಗ 1 ರ (11) ನ್ನು ನೋಡಿರಿ.]

(12) $\qquad |X-Y|^2 + |X+Y|^2 = 2|X|^2 + 2|Y|^2,$

ಮತ್ತು **ಧ್ರುವೀಕರಣ ಸಾಮ್ಯಕವನ್ನು** [ಭಾಗ 1ರ (12) ನ್ನು ನೋಡಿರಿ.]

(13) $\qquad (X, Y) = \frac{1}{4}|X+Y|^2 - \frac{1}{4}|X-Y|^2.$

(12) ಮತ್ತು (13) ರ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಗಾಗಿ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ ಸ್ಕ್ವಾರ್ಜ್ ಅಸಮತೆ (8) ನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ. $Y = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ (8) ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. $Y \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $a = (X, Y)/|Y|^2$ ಆಗಿರಲಿ, ಆಗ $0 \leq |X - aY|^2 = (X-aY, X-aY) = (X, X) - a(Y, X) - a(X, Y) + a^2(Y, Y) = |X|^2 - (X, Y)^2/|Y|^2$. ಹೀಗೆ $0 \leq |X|^2 - (X, Y)^2/|Y|^2$. ಇದೂ ಮತ್ತು (8) ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ. (8) ನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ (13) ರ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಲು, $X = aY + Z$ ಆಗಿರಲಿ, ಇಲ್ಲಿ $a = (X, Y)^2/|Y|^2$ ಮತ್ತು Z ಪ್ರಮೇಯ 13 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇದೆ. ಆಗ $|aY| = |(X, Y)|/|Y|$ ಆಗುವುದರಿಂದ (8) ನಮಗೆ Y ಮೇಲಿನ X ನ ಪ್ರಲಂಬನ ಉದ್ದವು X ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿಲ್ಲವೆಂದೂ ಹೇಳುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. ಕೆಳಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ವತ್ತ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

   (a) $V = R^2$: $((x, y), (x_1, y_1)) = xx_1 + 12\, yy_1 + 3(xy_1 + x_1y)$

(b) $V = R^3$: $((x, y, z), (x_1, y_1, z_1)) = xx_1 + yy_1 + zz_1 + \frac{1}{2}(yz_1 + y_1 z)$

(c) Vಯು $\leq n$ ಸ್ತರದ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ. a ಮತ್ತು bಗಳು $a < b$ ಆಗಿರುವ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $(f, g) = \int_b^a f(t)g(t)\,dt$.

(d) $(A, B) = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{12} + A_{21} B_{21} + A_{22} B_{22}$ ಯೊಂದಿಗೆ V ಯು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

(e) $(A, B) = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{12} + \cdots + A_{1n} B_{1n} + A_{21} B_{21} + \cdots + A_{2n} B_{2n} + \cdots + A_{m1} A_{m1} + A_{m2} B_{m2} + \cdots + A_{mn} B_{mn}$ ಯೊಂದಿಗೆ V ಯು $m \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

(f) $(ax^2 + ay^2 + cz^2 + dx + ey + fz, a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 + d_1x + e_1y + f_1z) = aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1 + ee_1 + ff_1$ ಹೊಂದಿದ V ಯು $ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz$ ರೂಪದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

2. ಅನಂತ ಆಯಾಮದ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ ಗಣನೀಯ ಉಪಯೋಗಿಯಾಗಿರುವ ಒಂದು ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಇಂತಿದೆ: V ಯು $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ ಅಭಿಚರಿಸುವಂತೆ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ $\{x_n\}$ ಅನುಕ್ರಮದ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವು $\{x_n\}, \{y_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. [R^n ಮೇಲಿನ ಸ್ಕ್ವಾರ್ಜ್ ಅಸಮತೆಯನ್ನು ಅಂದರೆ $|\sum_{i=M}^{N} x_i y_i|^2 \leq (\sum_{i=M}^{N} |x_i|^2)(\sum_{i=M}^{N} |y_i|^2)$ ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ ಇದು ಅಭಿಚರಿಸುವುದನ್ನು ತೋರಿಸಬಹುದು.]

3. ಕೆಳಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ R^2 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು **ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು** ತೋರಿಸಿರಿ; ಅಂದರೆ (2) ರ ಗುಣಧರ್ಮಗಳಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದಾದರೂ ಸಫಲವಾಗದೇ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

(a) $((x, y), (x_1, y_1)) = |xx_1| + yy_1$

(b) $((x, y), (x_1, y_1)) = xx_1 - yy_1$

(c) $((x_1, y), (x_1, y_1)) = xx_1 + 2xy_1 + 3x_1y + 7yy_1$

(d) $((x, y), (x_1, y_1)) = xx_1$

4. (11) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

5. (12) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6. R^4 ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರಲಿ. $X = (2, 1, 0, 1)$, $Y = (-3, 0, 1, 2)$ ಮತ್ತು $Z = (1, 2, 1, 1)$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿನವನ್ನು ಗುಣಿಸಿರಿ.

(a) $(X + Y - 3Z, Z)$ (b) $(X + Y, X - Y)$

(c) $|Z|$

(d) $3Y$ ಮೇಲಿನ Z ನ ಪ್ರಲಂಬನ.

(e) $-6Y$ ಮೇಲಿನ X ನ ಪ್ರಲಂಬನ.

(f) $Z + Y$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ $3X - Y$ ನ ಘಟಕಗಳು.

(g) X ಮತ್ತು Z ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನದ ಕೋಟಿಜ್ಯಾ.

7. X, Y ಮತ್ತು Z ಗಳು ಅಭ್ಯಾಸ 6 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇರಲಿ. ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ $((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = 2x_1y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 2x_4y_4$. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಗಣಿಸಿರಿ.

8. V ಯು ಸ್ತರ ≤ 5 ರ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. $X = 1 - t$, $Y = 3t + 2t^2$ ಮತ್ತು $Z = t^5$ ಆಗಿರಲಿ. $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ ಆಗಿರಲಿ. ಇದನ್ನು ಗುಣಿಸಿರಿ.

(a) $(X + Y - 3Z, Z)$ (b) $(X + Y, X - Y$ (c) $|Z|$

(d) $3Y$ ಮೇಲಿನ Z ನ ಪ್ರಲಂಬನ.

(e) $-6Y$ ಮೇಲಿನ X ನ ಪ್ರಲಂಬನ.

(f) $Z + Y$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ $3X - Y$ ನ ಘಟಕಗಳು.

(g) X ಮತ್ತು Z ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನದ ಕೋಟಿಜ್ಯಾ.

9. (X, Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ. Y ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ X ನ ಘಟಕಗಳು Y ನ ಉದ್ದದಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ :** aY ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ X ದ ಘಟಕಗಳೂ bY ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಘಟಕಗಳೂ ಒಂದೇ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

10. (a) ಕೇವಲ $b^2 - 4c < 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಎಲ್ಲ $(x, y) \neq (0, 0)$ ಗೂ $x^2 + bxy + cy^2 > 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ :** ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.]

(b) ಸ್ಕ್ವಾರ್ಟ್ಸ್ ಅಸಮತೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು (a) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ :** (2) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $0 \leq |X - aY|^2$ ಅನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ, ಅನಂತರ ಅಭ್ಯಾಸ $10\ (a)$ ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

11. V ಯು (5) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಂದಿಗೆ, ಅದರ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ.

(a) $n \neq m$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\sin 2n\pi t$ ಯು $\sin 2m\pi t$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) $\sin 2\pi t$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ $f(t) = t$ ಯ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. $X = a_1X^1 + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ ಮತ್ತು $Y = b_1X^1 + b_2X^2 + \cdots + b_nX^n$ ಆಗಿರಲಿ. (X, Y) ಯನ್ನು $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿ. (X, Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

13. R^3 ಯು ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು X ಮತ್ತು Y ಗಳು R^3 ನಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳಾಗಿರಲಿ.

(a) Y ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ X ನ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(b) Y ಗೆ X ಲಂಬವಾಗಿದೆಯೇ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಒಂದು ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಭಾಗ-3. ಲಂಬೀಯತೆ

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಲಂಬತ್ವದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಲಂಬೀಯತೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತುದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗುವುದು. V ಯು ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ ಸಮಷ್ಟಿ ಅಂದರೆ, ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ ಎಂದು ಗ್ರಹಿಸುತ್ತೇವೆ. R^n ಅನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವಾಗ ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳದಿದ್ದಲ್ಲಿ ನಾವು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವು ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಗ್ರಹಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದ್ದ 1 ಹೊಂದಿರುವ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ (V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರುವಾಗ) ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು V ಗೆ ರಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

ಅನ್ವಯದ ಸುಲಭತೆಗಾಗಿ ಭಾಗ 2 ರಿಂದ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ. V ಯು ಕೆಳಗಿರುವ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಡನೆ $0 \leq t \leq 1$ ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ, ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ವಾಸ್ತವಿಕ–ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ [ಭಾಗ 2 ರ (5) ನ್ನು ನೋಡಿ.]

(1) $$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

ಈ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸಲು ಸಹಾಯಕವಾಗುವ ಇನ್ನೊಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವು, R^2 ಮೇಲಿನದು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. [ಭಾಗ 2 ರ (4) ನ್ನು ನೋಡಿ]

(2) $$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 x_2 + (x_1 + y_1)(x_2 + y_2).$$

ಈಗ V ಯು ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು (X, Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ. V ಯುಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸದಿಶಗಳ ಒಂದು ಗಣ D ಯನ್ನು $x \neq y$ ಆಗಿರುವಂತೆ D ಯುಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು

X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೂ $(X, Y) = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಗಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. D ಯು ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು D ಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು X ಗೂ $|X| = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ D ಯನ್ನು ಸಮಲಂಬೀಯ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಟೀಕೆಗಳು : ಭಾಗ 1 ರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ $\{i, j, k\}$ ಗಣವು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಗಣವಾಗಿದೆ. $\{(0, 0), (1, 2), (2, -1)\}$ ಗಣವು R^2 ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯಗಣವಾಗಿದೆ, ಆದರೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಗಣವಾಗಿಲ್ಲ. (ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.) $\{\sin \pi t, \sin 2\pi t, \dots, \sin n\pi t \dots\}$ ಗಣವು (1) ರ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯಗಣವಾಗಿದೆ. ಇದು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

$$(3) \qquad \int_0^1 \sin k\pi t \sin n\pi t \, dt = 0, \quad n \neq k.$$

$\{(1, 2), (2, -1), (3, 7)\}$ ಗಣವು R^2 ನಲ್ಲಿ **ಲಂಬೀಯವಾಗಿಲ್ಲ** (ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ). $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)\}$ ಗಣವು R^4 ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಗಣವಾಗಿದೆ.

ಈಗ R^2 ಯು (2) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $\{(1, 0), (0, 1)\}$ ಗಣವು ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಗಣವಾಗಿಲ್ಲದೆ ಇರುವಾಗ $\{(1 -1), (0, 1)\}$ ಗಣವು ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಗಣವಾಗಿದೆ.

0 ಯು ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಗಣದಲ್ಲಿ ಇರಲಾರದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಆದರೆ ಲಂಬೀಯಗಣದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವು, 0 ಯನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವುದಿಲ್ಲ. D ಯು ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, 0 ಯನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳದೇ ಇದ್ದರೆ ಆಗ ನಾವು D ಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸದಿಶವನ್ನೂ ಅದರ ಉದ್ದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಗಣವನ್ನು ದೊರಕಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\{(2, 1), (1, -2)\}$ ಎನ್ನುವುದು R^2 ನಲ್ಲಿ ಲಂಬೀಯವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಸಮಲಂಬೀಯ ವಾಗಿಲ್ಲ. (ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.) $\{(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})\}$ ಗಣವು R^2 ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಗಣವಾಗಿದೆ.

ಬಹುಭಾಗ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಲಂಬೀಯುಗಣಗಳಿಗೆ ಅಥವಾ ಸಮಲಂಬೀಯ ಗಣಗಳಿಗೆ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಡಬಹುದು. ಗಣಗಳು ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿರುವಾಗ ದೊರಕುವ ಸರಳತೆಗಾಗಿ, ಗಮನವನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ಅಂತಹ ಗಣಗಳ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರೀಕರಿಸಲಾಗುವುದು. ಮೊದಲ ಫಲಿತಾಂಶವು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ V ಯಲ್ಲಿ ಅಥವಾ R^2 ನಲ್ಲಿ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವಾಗಿದೆ.

(4) D ಯು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ D ಯು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಗಣ D ಯಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿರುವಲ್ಲಿ $c_1X^1 + c_2X^2 + \cdots + c_k X^k + 0$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $0 = (0, X^1) = (c_1X^1 + c_2X^2 + \cdots + c_kX^k, X^1) = c_1(X^1, X^1) + c_2(X^2, X^1) + \cdots + c_k (X^k, X^1)$. ಆದರೆ $(X^1, X^1) = 1$ ಮತ್ತು $(X^2, X^1) = (X^3, X^1) = \cdots + (X^k, X^1) = 0$. ಹೀಗೆ $c_1 = 0$. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ X^i ನೊಡನೆ $0 = c_1X^1 + c_2X^2 + \cdots = c_kX^k$ ಯ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ, $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. ಇದು (4) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ. ಲಂಬೀಯ ಗಣಗಳಿಗೆ [4] ಕೆಳಗಿನ ರೂಪವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

(5) D ಯು ಒಂದು ಲಂಬೀಯಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು 0 ಯು D ಯಲ್ಲಿಲ್ಲದ್ದರೆ, ಆಗ D ಯು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಅನೇಕ ಅನುಮಿತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಎಲ್ಲವೂ (4) ಅಥವಾ (5) ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಾಯ 1ರ ಭಾಗ 3ರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೊಂಡು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು.

(6) $\dim V = n$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯಗಣ D ಯು (ಅಥವಾ 0 ಯನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳದಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯಗಣ) ಗರಿಷ್ಠ n ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಒಳ ಗೊಂಡಿದೆ.

(7) $\dim V = n$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ n ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯಗಣ D ಯು (ಅಥವಾ 0 ಯನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳದಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಗಣವು) V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ.

V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯಗಣ D. ಇದನ್ನು **ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರ ವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯಗಣ D ಯನ್ನು ಒಂದು **ಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ** ಎಂದು

ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸದಿ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಸರಳರೂಪದಲ್ಲಿ ದೊರಕಿಸಬಹುದು. $\{X^1, X^2, \dots X^n\}$ V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ [(x, y) ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ ಸಂಬಂಧಕವಾಗಿ]. V ಯಲ್ಲಿ X ಇರಲಿ ಆಗ,

$$(8) \qquad X = (X, X^1)X^1 + (X, X^2)X^2 + \dots + (X, X^n)X^n$$

$\{X^1, X^2, \dots, X^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರುವುದರಿಂ $X = a_1X^1 + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. X_1 ಗೆ ಸಾಪೇ ವಾದ ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಆಗ (X, X^1) $(a_1X^1 + a_2X^2 + \dots + a_nX^n, X^1) = a_1(X^1, X^1) + a_2(X^2, \dots + a_n(X^n, X^1)$. ಆದರೆ $(X^1, X^1) = 1$ ಮತ್ತು (X^i, X^1) 0, $i = 2, 3, \dots, n$. ಹೀಗೆ $a_1 = (X, X^1)$. ಹಾಗೆಯೇ a_i (X, X^i), $i = 2, 3, \dots, n$. ಇದು (8) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತದೆ.

(8) ರ ರೂಪವು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಗಣನೆಯನ್ನು ಬಹು ಸರಳಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ. $\{X^1 X^2, \dots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ X ನ iನೇ ನಿರ್ದೇಶಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯ ಬೇಕಾದರೆ [ಇಲ್ಲಿ $\{X^1, X^2, \dots, X^n\}$ ಯು ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ (X, Y) ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ.] ನಾವು ಕೇವಲ X ನ್ನು X^i ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿ ಪ್ರಲಂಬಿಸಿ, $(X, X^i)X^i$ ಅನ್ನು ದೊರಕಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ iನೇ ನಿರ್ದೇಶಕವು (X, X^i) ಆಗಿದೆ. $\{X^1, X^2, \dots, X^n\}$ ಯು (X, Y) ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಲ್ಲಿ, ಆಗ ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮತ್ತು X^i ಮೇಲೆ X ನ iನೇ ನಿರ್ದೇಶಕವು ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$\{X^1, X^2, \dots, X^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (8) ಕೆಳಗಿನ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತದೆ.

$$(9) \qquad X = \frac{(X, X^1)}{|X^1|^2}X^1 + \frac{(X, X^2)}{|X^2|^2}X^2 + \dots + \frac{(X, X^n)}{|X^n|^2}X^n.$$

ಭಾಗ 1 ರಲ್ಲಿ V ಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಆಧಾರ $\{i, j, k\}$. ಇದು V ಗೆ

ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. ಅಂತೆಯೇ,

$$\left\{\frac{i+j}{\sqrt{2}}, \frac{i-j}{\sqrt{2}} k\right\}.$$

$v = xi + yj + zk$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$v = \left(v \cdot \frac{i+j}{\sqrt{2}}\right)\frac{i+j}{\sqrt{2}} + \left(v \cdot \frac{i-j}{\sqrt{2}}\right)\frac{i-j}{\sqrt{2}} + (v \cdot k)k$$

$$= \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\frac{i+j}{\sqrt{2}} + \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)\frac{i-j}{\sqrt{2}} + zk$$

(2) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು R^2 ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆಗ $\{(1, -1), (0, 1)\}$ಯು ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ

$$(x, y) = ((x, y), (1, -1)\ (1, -1) + (x, y), (0, 1)\ (0, 1))$$
$$= (x + (x + y)\ (1 - 1)\ (1, -1) + (x, 0 + (x + y)$$
$$(0 + 1)\ (0, 1)$$
$$= x(1, -1) + (x + y)\ (0, 1).$$

ನಾವು V ಗೆ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಅಥವಾ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ? V ಗೆ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಲ್ಲಿ ಅಂಥ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ರಚಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ, ಮೂಲಭೂತವಾಗಿ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗುವುದು.

ಗಣ $\{(1, 2, 2), (-1, 0, 1), (2, 1, 0)\}$ ವು R^3 ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇದು ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿಲ್ಲವೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. $Y^1 = (1, 2, 2)$ ಆಗಿರಲಿ. ಸದಿಶ $(-1, 0, 1)$ ಯು Y^1 ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿಲ್ಲ. Y^1 ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಘಟಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇದರಿಂದ Y^2 ಎಂದು ಕರೆಯಿರಿ. ಇದರಿಂದ

$$Y^2 = (-1, 0, 1) - \frac{((-1,0,1), (1,2,2))}{\|(1,2,2)\|^2}(1,2,2) = (-\tfrac{10}{9}, -\tfrac{2}{9}, \tfrac{7}{9}).$$

ಆಗ Y^1 ಮತ್ತು Y^2 ಗಳು ನಾವು Y^2 ಅನ್ನು ರಚಿಸಿದ ರೀತಿಯಿಂದಾಗಿ ಲಂಬವಾಗಿವೆ, $(2, 1, 0)$ ಯು Y^1 ಗೆ ಅಥವಾ Y^2 ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿಲ್ಲ.

(2, 1, 0)ನ್ನು Y^1 ಗೆ ಮತ್ತು Y^2 ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿ ಉತ್ಕ್ಷೇಪಿಸಲಾಗುವುದು ಮತ್ತು ಈ ಪ್ರಲಂಬನಗಳನ್ನು (2, 1, 0) ದಿಂದ ಕಳೆಯಲಾಗುವುದು. ಇದನು Y^3 ಸದಿಶ ಎಂದು ಕರೆಯಿರಿ. ಆಗ Y^1 ಮತ್ತು Y^2 ಗಳೆರಡಕ್ಕೂ Y^3 ಲಂಬ ವಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ

$$Y^3 = (2, 1, 0) - \frac{((2,1,0), (1,2,2))}{|(1,2,2)|^2}(1,2,2)$$

$$- \frac{((2,1,0), (-\frac{10}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{7}{9}))}{|(-\frac{10}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{7}{9})|^2}(-\tfrac{10}{9}, -\tfrac{2}{9}, \tfrac{7}{9})$$

$$= (\tfrac{2}{17}, -\tfrac{3}{17}, \tfrac{2}{17}).$$

ಹೀಗೆ $\{Y^1, Y^2, Y^3\}$ ಯು (0, 0, 0) ನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳದಿರುವ ಒಂದು *ಲಂಬೀಯ ಗಣವಾಗಿದೆ* ಮತ್ತು (7) ರಿಂದ ಇದು R^3 ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. ರಚನೆಯಿಂದ, Y^1 ಯು $\{(1, 2, 2)\}$ ಇದರ ಮತ್ತು Y^2 ಯು $\{(1,2,2), (-1,0,1)\}$ ಯ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು Y^3 ಯು $\{(1, 2, 2), (-1, 0, 1), (2, 1, 0)\}$ ಯ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಸಂಯೋಜನೆ ಯಾಗಿದೆ.

$$Z^1 = \frac{Y^1}{|Y^1|}, \quad Z^2 = \frac{Y^2}{|Y^2|}, \quad \text{ಮತ್ತು} \quad Z^3 = \frac{Y^3}{|Y^3|}. \quad \text{ಎಂದಿರಲಿ}$$

ಆಗ $\{Z^1, Z^2, Z^3\}$ ಯು R^3ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ; Z^1 ಯು (1, 2, 2) ಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಾಗಿದೆ; Z^2 ಯು $\{(1, 2, 2), (-1, 0, 1)\}$ ಯ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು Z^3 ಯು $\{(1, 2, 2), (-1, 0, 1), (2, 1, 0)\}$ ಯ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ

$$Z^1 = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}), \quad Z^2 = \frac{9}{\sqrt{153}}(-\tfrac{10}{9}, -\tfrac{2}{9}, \tfrac{7}{9});$$

ಮತ್ತು

$$Z^3 = \sqrt{17}\,(\tfrac{2}{17}, -\tfrac{3}{17}, \tfrac{2}{17}).$$

ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು **ಗ್ರಾಮ್–ಷ್ಮಿಡ್ಟ್ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವೆಂದು** ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣವಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 14. (X,Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು Vಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು i, $1 \leq i \leq n$ಗೆ Z^iಯು $\{X^1, X^2, \ldots, X^i\}$ ಯ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿರುವಂತೆ Vಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ $\{Z^1, Z^2, \ldots, Z^n\}$ ಇದೆ.

ಸಾಧನೆ. ಮೇಲಿನಂತೆ ಮುಂದುವರಿದಲ್ಲಿ,

$$Y^1 = X^1,$$

$$Y^2 = X^2 - \frac{(X^2, Y^1)}{|Y^1|^2} Y^1,$$

$$Y^3 = X^3 - \frac{(X^3, Y^2)}{|Y^2|^2} Y^2 - \frac{(X^3, Y^1)}{|Y^1|^2} Y^1, \ldots,$$

$$Y^n = X^n - \frac{(X^n, Y^{n-1})}{|Y^{n-1}|^2} Y^{n-1} - \ldots - \frac{(X^n, Y^1)}{|Y^1|^2} Y^1.$$

ಎಂದಿರಲಿ

ಪ್ರತಿಯೊಂದು i, $1 \leq i \leq n$ಗೆ, M_i ಯು $\{X^1, X^2, \ldots, X^i\}$ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $1 \leq i \leq n$ಗೆ Y^i ಯು ರಚನೆಯಿಂದ M_i ನಲ್ಲಿದೆ. $1 \leq i \leq (n-1)$ಗೆ X^{i+1} ಯು M_i ನಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ $Y^1 \neq 0$. $Y^{i+1} = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$X^{i+1} = \frac{(X^{i+1}, Y^i)}{|Y^i|^2} Y^i + \ldots + \frac{(X^{i+1}, Y^1)}{|Y^1|^2} Y^1.$$

ಈ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಬಲಭಾಗವು M_i ನಲ್ಲಿರುವಾಗ, ಎಡಭಾಗವು M_i ನಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ. ನಾವು $1 \leq i \leq (n-1)$ಗೆ $Y^{i+1} \neq 0$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಬೇರೆ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ $1 \leq i \leq n$ಗೆ $Y^i \neq 0$.

ರಚನೆಯಿಂದ $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಯು ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಗಣವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $1 \leq i \leq n$ಗೆ $Y^i \neq 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

$$Z^i = \frac{|Y^i|}{Y^i}, \; i = 1, 2, \ldots, n \text{ ಇರಲಿ}$$

ಆಗ (7) ರಿಂದ V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರುವ $\{Z^1, Z^2, \ldots, Z^n\}$ ಯು ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಗಣವಾಗಿದೆ. ಅಲ್ಲದೆ $i = 1, 2, \ldots, n$ಗೆ Y^i ಯು M_i ನಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, Z^i ಕೂಡ M^iನಲ್ಲಿದೆ.

Z^i ಯು M_i ನಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಒಂದು ಕುತೂಹಲಕಾರಿಯಾದ ಮಾತೃಕೆ ಸದೃಶವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ನಾವೀಗ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. $\{Z^1, Z^2, \ldots, Z^i\}$ ಯು M_i ನಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು $\dim M_i = i$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $i = 1, 2, \ldots, n$ಕೆ, $\{Z^1, Z^2, \ldots, Z^i\}$ ಯು M_i ಗೆ ಒಂದು ಸಮ ಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

(10) $i = 1, 2, \ldots, n$ಗೆ X^i ಯು $\{Z^1, Z_2, \ldots, Z^i\}$ಯ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಸಂಗತಿ.

ಈಗ A ಯು ಒಂದು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$X^j = \begin{bmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{nj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

ಇವನ್ನು R^nನಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳಂತೆ ಪರಿಗಣಿಸುವುದರಿಂದ, $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು R^nಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದಿರುವುದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 14ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ, R^nಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ $\{Z^1, Z^2, \ldots, Z^n\}$ ನ್ನು ದೊರಕಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. $j = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ ತನ್ನ jನೇ ನೀಟಸಾಲನ್ನು Z^jಯಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯು U ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ Uನ ನೀಟಸಾಲುಗಳು R^n ನಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳಂತೆ ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ (R^n ಮೇಲಿನ ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು). (10)ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ,

(11) $X^i = d_{1i}Z^1 + d_{2i}Z^2 + \cdots + d_{ii}Z^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

$\Delta = (d_{ij})$ ಆಗಿರಲಿ, ಇಲ್ಲಿ $i > j$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $d_{ij} = 0$. ಮತ್ತು $i \le j$ ಆಗಿದ್ದರೆ d_{ij} ಯು (11) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಆಗ (11) ರಿಂದ

(12 $A = U\Delta.$

ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

(13) A ಯು ಒಂದು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, Uನ ನೀಟಸಾಲುಗಳು ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, (R^nನಲ್ಲಿನ ಸದಿಶಗಳಂತೆ ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ, R^n ಮೇಲಿನ ನಿಖರ ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ) ಮತ್ತು $\triangle$ವು ಊರ್ಧ್ವ ತ್ರಿಕೋನೀಯವಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, ಆಗ $A = U\triangle$ ಮತ್ತು $\triangle$ದ ಕರ್ಣರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ದಾಖಲಾತಿಗಳು ಅಶೂನ್ಯವಾಗಿವೆ.

$\triangle$ನ ಕರ್ಣರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ದಾಖಲಾತಿಗಳು ಅಶೂನ್ಯಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾದರೆ ನಾವು $d_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು. ಯಾವುದಾದರೂ i, $1 \leq i \leq n$ಗೆ $d_{ii} = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ X^i ಯು $\{Z^1, Z^2, \ldots, Z^{i-1}\}$ನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ, X^i ಯು M^{i-1} ನಲ್ಲಿದೆ (ಪ್ರಮೇಯ 14ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ). $\{X^1, X^2, \ldots, X^i\}$ ಯು ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು $\{X^1, X^2, \ldots, X^{i-1}\}$ ಯು M_{i-1} ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದು ಸಂಭವಿಸಲಾರದು. ಇದು ಪ್ರಮೇಯ 14ರ ಮಾತೃಕೆ ಸದೃಶವೇ ಆಗಿದ್ದು, (13)ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯು (13) ನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸುತ್ತದೆ. ಮಾತೃಕೆ

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ $\{(2,2), (1,3)\}$ ಇದು R^2ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. ಪ್ರಮೇಯ 14 ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ $Z^1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ಮತ್ತು $Z^2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. (8)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಲ್ಲಿ

$$(2, 2) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ಮತ್ತು

$$(1, 3) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

ಇದು ಮಾತೃಕೆಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಹೀಗಿದೆ:

$$(14) \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕಿಂತ ಬೇರೆಯಾದ R^n ಮೇಲಿನ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಿಗೆ ಫಲಿತಾಂಶ (13)ನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, (2) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಈ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, $\{(2, 2), (1, 3)\}$ಗೆ, ಪ್ರಮೇಯ 14ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿರಿ. ಆಗ

$$|(2,2)|^2 = ((2,2),(2,2)) = 4 + 4\cdot 4 = 20,$$

$$(1,3) - \frac{((1,3),(2,2))}{|(2,2)|^2}(2,2) = (1,3) - (2 + 4\cdot 4)\frac{(2,2)}{20} = (-\tfrac{4}{5}, \tfrac{6}{5}).$$

ಹೀಗೆ $Z^1 = (1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ ಮತ್ತು $Z^2 = (-2/\sqrt{5}, 3/\sqrt{5})$. (8)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಲ್ಲಿ

$$(2,2) = \left((2,2),\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$+ \left((2,2),\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= 2\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

ಮತ್ತು

$$(1,3) = \left((1,3),\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$+\left((1,3),\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=\tfrac{9}{5}\sqrt{5}\left(\frac{}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{2\sqrt{5}}{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

[ನೆನಪಿಡಿ : ಈ ಎಲ್ಲ ಗಣನೆಗಳೂ (2)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟವೆ ಮಾತೃಕೆ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ :

(15) $$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\sqrt{5} & \frac{9\sqrt{5}}{5}\\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{bmatrix}$$

(13) ರ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕೃತ ರೂಪವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ:

(16) A ಯು ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, $\triangle$ವು ಅಶೂನ್ಯ ಕರ್ಣ ರೇಖಾತ್ಮಕ ದಾಖಲಾತಿಗಳೊಡನೆ ಊರ್ಧ್ವ ತ್ರಿಕೋನೀಯವಾಗಿರುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು Uನ ನೀಟಸಾಲುಗಳು (R^n ನಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳಂತೆ ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟು) ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ (X, Y)ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಲಂಬೀಯವಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, $A = U\triangle$.

(16) ರ ಸಾಧನೆಯೂ (13) ರ ಸಾಧನೆಯೂ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. ಕೆಳಗಿನ R^3ನ ಉಪಗಣಗಳಲ್ಲಿ (ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ) ಲಂಬೀಯವಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು ? ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು ?

   (a) $\{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1), (3, 2, 1)\}$

   (b) $\{(1, 1, 1), (0, -1, 1), (0, 1, 1)\}$

(c) $\{ (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0), (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0) \}$

(d) $\{ (1, 2, 1), (1, -1, 0), (0, 1, 0) \}$

2. ಕೆಳಗಿನದು R^3 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಈ ಆಂತರಿಕಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಅಭ್ಯಾಸ 1ರ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.

$$\begin{aligned}((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) &= 2x_1x_2 + \tfrac{1}{2}(y_1y_2 + z_1z_2 - y_1x_2 - x_1y_2 - \\ &\qquad x_1z_2 - z_1x_2)\end{aligned}$$

3. ಸೂಚಿತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಡನೆ, ಸೂಚಿತ ಸಮಷ್ಟಿ Vಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವನ್ನು ದೊರಕಿಸಲು ಕೆಳಗಿರುವ ಪ್ರತಿನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣಕ್ಕೆ ಗ್ರಾಮ್-ಷ್ಮಿಡ್ಟ್ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿರಿ.

(a) $\{ (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1) \}$ ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಡನೆ $V = R^3$.

(b) $\{ (2, 1, -1, 0), (1, 2, 1, 1), (0, 1, 3, 1), (1, 0, 1, 1) \}$ ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಡನೆ $V = R^4$.

(c) $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ $\{1, t, t^2, t^3\}$ ದೊಡನೆ, Vಯು ಸ್ತರ ≤ 3 ರ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

(d) $(A, B) = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{21}B_{21} + A_{22}B_{22}$;

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\}$$

ಹೊಂದಿದ 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಸಮಷ್ಟಿ V ಇದೆ.

4. (8) ಅಥವಾ (9) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ದತ್ತ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ, ಕೆಳಗಿರುವ ಸದಿಶಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) ಸದಿಶಗಳು : $(2, 1, 0)$ ಮತ್ತು $(3, -1, 2)$

ಆಧಾರಗಳು : $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0, 0, 1) \right\}$

$\{ (1, 1, 1), (0, -1, 1), (0, 1, 1) \}$

(b) ಸದಿಶಗಳು : $(3, 1, 2, 1)$ ಮತ್ತು $(0, 0, 1, 0)$

ಆಧಾರಗಳು : $\{ (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, -3), (1, -1, 0, 0), (1, 1, -2, 0) \}$

(c) ಸದಿಶಗಳು : $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) ಸದಿಶಗಳು : t ಮತ್ತು $t^3 + t^2 + t + 1$

ಆಧಾರ : ಅಭ್ಯಾಸ $3(c)$ ಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ.

ಆಧಾರ : ಅಭ್ಯಾಸ 3 (d) ಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ.

5\. (a) V ಯು (1) ರ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. $\{\sin \pi t, \sin 2\pi t, \sin 3\pi t, \cdots\}$ ಯು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಗಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) V ಯು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ ಯೊಡನೆ, $-1 \leq t \leq 1$ ಗಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ವಾಸ್ತವಿಕ–ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}\left((t^2 - 1)^n\right), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

ಇರಲು $\{P_1, P_2, P_3, \cdots\}$ ಯು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಗಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ; [**ಸೂಚನೆ** : ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಅನುಕಲಿಸಿರಿ.]

(6) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ಇರಲಿ.

(a) R^3 ಮೇಲಿನ ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. U ವನ್ನು ಮತ್ತು Δ ವನ್ನು (13) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) ಅಭ್ಯಾಸ 2 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ R^3 ಮೇಲಿನ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ ವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, U ವನ್ನು ಮತ್ತು $\triangle$ ವನ್ನು (16) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. (X, Y) ಯು ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು V ಯಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ :

(a) $|X|^2 \geq (X, X^1)^2 + (X, X^2)^2 + \cdots + (X, X^k)^2$.

(b) $|X|^2 = (X, X^1)^2 + (X, X^2)^2 + \cdots + (X, X^k)^2$ ಇದು ಕೇವಲ X ಯು $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

(c) $\int_0^1 |f(t)|^2 dt \geq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2$, ಇಲ್ಲಿ $0 \leq t \leq 1$ಗೆ f ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $r = 1, 2, \ldots$ಗೆ $a_r = 2 \int_0^1 f(t) \sin r\pi t \, dt$ [**ಸೂಚನೆ** : 7(a) ಮತ್ತು 7(b) ಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು, $X-(X, X^1) X^1-(X, X^2)X^2 - \cdots - (X, X^k)X^k$ ಯ ಉದ್ದದ ವರ್ಗವನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಿರಿ. 7(c) ಯನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು 7(a) ಮತ್ತು 5(a) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. ಅಭ್ಯಾಸ 7(a) ಇದನ್ನು **ಬೆಸೆಲ್‌ನ ಅಸಮತೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.]

8. (X, Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಗಣ ವಾಗಿರಲಿ. $Y = X - c_1X^1 - c_2X^2 - \ldots - c_kX^k$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೇವಲ ಎಲ್ಲ i, $1 \leq i \leq k$ ಗೆ $c_i = (X, X^i)$ ಆಗಿರುವಾಗ ಮಾತ್ರ $|Y|^2$ ಯು ಅದರ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪರಿಗ್ರಹಿಸುತ್ತದೆಂದು **ತೋರಿಸಿರಿ.** [**ಸೂಚನೆ** : $|Y|^2 = |X|^2 - ((X, X^1)^2 + (X, X^2)^2 + \cdots + (X, X^k)^2) + (c_1 - (X, X^1))^2 + (c_2 - (X, X^2))^2 + \cdots + (c_k - (X, X^k))^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

9. Aಯು ಒಂದು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ತನ್ನ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳು ಲಂಬೀಯವಾಗಿರುವ ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ U ಇದೆಯೆಂದೂ ಮತ್ತು $A = \triangle U$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ನಿಮ್ನ ತ್ರಿಕೋಣೀಯ ಮಾತೃಕೆ $\triangle$ ಇದೆಯೆಂದೂ ತೋರಿಸಿರಿ. ಅಲ್ಲದೆ, $\triangle$ ದ ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ದಾಖಲಾತಿಗಳು ಅಶೂನ್ಯವಾಗಿವೆ ಎಂದೂ ತೋರಿಸಿರಿ.

10. R^3ಯು ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಒಂದು ಗಣಕ್ಕೆ ಗ್ರಾಮ್-ಷ್ಮಿಡ್ಟ್ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲು ಒಂದು ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಭಾಗ 4. ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳು ಮತ್ತು ಪೂರಕಗಳು

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೇಲಿನ ನಮ್ಮ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯುು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಮೇಲೆ ಕೆಲವು ವಿಧದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ. R^3 ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಡನೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು R^3 ಮೇಲಿನ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದಂತೆ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

fಯು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವ್ಯಾಖಿಸಲ್ಪಟ್ಟ R^3 ಮೇಲಿನ ವಾಸ್ತವಿಕ-ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ;

1) $f(x, y, z) = x - y + z$.

ಆಗ f ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು

2) ಸ್ಥಾನ $(f) = 1$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

f ನ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯು $f(x, y, z) = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ (x, y, z) ತ್ರಿವಳಿಗಳ ಗಣವಾಗಿದೆ. (2) ರಿಂದ ಈ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು ಆಯಾಮ 2 ರದ್ದಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $x - y + z = 0$ ದಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮತಲವೇ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಪ್ರಮೇಯ 6ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ರಚಿಸಲು

ಒಂದು ಸಾಧನವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲಾಯಿತು. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ ಯು f ನ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೋಡಲಾಗುವುದು. $(1, 1, 1)$ ಸದಿಶವು ಈ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ **ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ** 2 ರಿಂದ ಗಣ $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಆ ಕಾರಣದಿಂದ R^3 ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. ಈ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಗ್ರ್ಯಾಮ್-ಷ್ಮಿಡ್ಟ್ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ,

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದು R^3ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ ಮತ್ತು $(-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$ಗಳು $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ಯ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅವು f ನ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿವೆ. ಸದಿಶ $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ಯು $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ ಮತ್ತು $(-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$ ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಆ ಕಾರಣದಿಂದ ಅವುಗಳ ಯಾವುದೇ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ, $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) 1/\sqrt{3})$ಯು f ನ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ ಯ ಯಾವುದೇ ಗುಣಕವೂ ಕೂಡ f ನ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಈ ಉಕ್ತಿಯ ವಿಲೋಮವು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, f ನ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶವು X ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ ಮತ್ತು $(-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$ ಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ X ಗೆ ಪ್ರಲಂಬನ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದೆ. ಭಾಗ 3ರ (8) ರಿಂದ $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $(-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$ ಮತ್ತು $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ ಗಳಿಗೆ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಾದ ತನ್ನ ಪ್ರಲಂಬನಗಳ ಮೊತ್ತವೇ X. ಆಗಿದೆಯೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ ಯು

ಒಂದು ಗುಣಕವು X ಆಗಿದೆ. ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಿದರೆ,

(a) $\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\}$ ಯು R^3 ಗೆ ಒಂದು ಸಮ ಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ.

(3) (b) $\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})\}$ ಯು f ನ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ ವಾಗಿದೆ.

(c) $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪ ಸಮಷ್ಟಿಯು f ನ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸದಿಶಕ್ಕೂ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿದೆ.

ಈಗ R^3 ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ನಿರಂಕುಶ ಸದಿಶವು X ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $X = a(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) + b(-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}) + c(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. f ಅನ್ನು X ಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ f ನ ರೇಖಾತ್ಮಕತೆ ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ :

$$f(X) = af\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + bf\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$+ cf\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= cf\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3c}{\sqrt{3}}.$$

ಇಲ್ಲಿ c ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅರಿತಿದ್ದೇವೆ :

$$c = \left(X, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right),$$

ಭಾಗ 3 ರ (8) ರಿಂದ

$$(4) \quad f(X) = \frac{3}{\sqrt{3}}\left(X, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = (X, (1, -1, 1)).$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಹೀಗಿದ್ದರೂ, ಸಮೀಕರಣ (4) ನ್ನು, ನೇರವಾಗಿ (1) ರಿಂದ (2) ಅಥವಾ (3) ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸದೆ ಹಾಗೆಯೇ ದೊರಕಿಸಬಹುದು. (4) ನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣಗೊಳ್ಳಬಲ್ಲ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

V ಯು ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಮತ್ತು (X, Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. V ಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ M ನ **ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕವು**, M ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸದಿಶಕ್ಕೂ ಲಂಬವಾಗಿರುವ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. M ನ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕವನ್ನು $M^\perp$ ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ (ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ 'M ಲಂಬ' ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ). ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, f ನ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $M^\perp$ ಯು $(3c)$ ಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವಂತೆ $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ

(5) $M^\perp$ ಯು V ಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

ಏಕೆಂದರೆ, X ಮತ್ತು Y ಗಳು $M^\perp$ ದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(X, Z) = (Y, Z) = 0$, M ನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ Z ಗಳಿಗೆ. ಆದ್ದರಿಂದ M ನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ Z ಗಳಿಗೆ, $(aX+bY, Z) = a(X, Z) + b(Y, Z) = 0$ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ $M^\perp$ ದಲ್ಲಿ 0 ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $M^\perp$ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ f ನ ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯೂ ಮತ್ತು ಅದರ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕವೂ, R^3 ಅನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಾಗುವುದು.

(6) **R^3 ನಲ್ಲಿ X ಇದ್ದರೆ ಆಗ f ನ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ Y ಇರುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು f ನ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕದಲ್ಲಿ Z ಇರುವಲ್ಲಿ, X ಅನ್ನು $X = Y + Z$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.**

$X = a(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},\ 0) + b(-1/\sqrt{6},\ 1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6}) + c$ $(1/\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3})$ ಎಂದು (3) ರಿಂದ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. $Y = a$ $(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},\ 0)\ +\ b\ (-1/\sqrt{6},\ 1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6})$ ಮತ್ತು $Z = c$ $(1/\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3})$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ Y ಮತ್ತು Z ಗಳು (6) ಅನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ. ಈಗ (6) ನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಲಾಗುವುದು. ಕೆಳಗಿರುವುದು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ.

(7) M ಮತ್ತು $M^{\perp}$ ಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಶೂನ್ಯ ಸದಿಶವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿವೆ.

ಏಕೆಂದರೆ, M ನಲ್ಲಿ X ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು $M^{\perp}$ ದಲ್ಲಿ X ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $(X,X) = 0$, ಅಂದರೆ $X = 0$ ಫಲಿತಾಂಶವು (6) ರ ಹಾಗೆಯೇ ಪ್ರಮೇಯ 13ರ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣವೂ ಆಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 15. V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು V ಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ M ನಲ್ಲಿ Y ಇರುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು $M^{\perp}$ ದಲ್ಲಿ Z ಇರುವಲ್ಲಿ, V ಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸದಿಶ X ಅನ್ನು $X = Y + Z$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಸಾಧನೆ : $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು M ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. V ಯನ್ನು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಈ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಗ್ರಾಮ್-ಶ್ಮಿಡ್ಟ್ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿರಿ. ಇದು Z^i ಯು $\{X^1, X^2, \ldots, X^i\}$ ಯ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿರುವಂತೆ V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ $\{Z^1, Z^2, \ldots, Z^n\}$ ವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. M ನಲ್ಲಿ $\{Z^1, Z^2, \ldots, Z^k\}$ ಯು ಒಳಗೊಳ್ಳಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಮತ್ತು ಆ ಕಾರಣದಿಂದ M ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. $M^{\perp}$ ಗೆ $\{Z^{k+1}, Z^{k+2}, \ldots, Z^n\}$ ಯು ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ವಾದಿಸುತ್ತೇವೆ. V ಯಲ್ಲಿ X ಇರಲಿ. ಆಗ ಭಾಗ 3 ರ (8) ರಿಂದ $X = (X,Z^1)Z^1 + (X,Z^2)Z^2 + \cdots + (X,Z^n)Z^n$. $M^{\perp}$ ದಲ್ಲಿ X ಇದ್ದರೆ ಆಗ $(X, Z^1) = (X,Z^2) = \cdots = (X,Z^k) = 0$. ವಿಲೋಮವಾಗಿ $(X,Z^1) = (X,Z^2) = \cdots = (X,Z^k) = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $\{Z^1, Z^2, \ldots, Z^k\}$ ಯ ಯಾವುದೇ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆಗೆ ಅಂದರೆ, M ನಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶಕ್ಕೆ X ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $M^{\perp}$ ದಲ್ಲಿ X ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳುವುದೂ, $(X,Z^1) = (X,Z^2) = \cdots = (X,Z^k) = 0$ ಎಂದು ಹೇಳುವುದೂ $X = (X,Z^{k+1})\ Z^{k+1} + (X,Z^{k+2})\ Z^{k+2} + \cdots + (X,Z^n)$

Z^n ಎಂದು ಹೇಳುವುದೂ ಎಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ. ಆದ್ದರಿಂದ $\{Z^{k+1}, Z^{k+2}, \ldots,$ $Z^n\}$ ಯು $M^\perp$ ಅನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ $\{Z^{k+1}, Z^{k+2}, \ldots, Z^n\}$ ಯು $M^\perp$ ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ.

V ಯಲ್ಲಿ X ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $X = (X,Z^1)Z^1 + (X,Z^2)Z^2 + \cdots + (X, Z^k)Z^k + (X, Z^{k+1}) Z^{k+1} + (X, Z^{k+2})Z^{k+2} + \cdots + (X,Z^n)Z^n$. $Y = (X,Z^1)Z^1 + (X,Z^2)Z^2) + \cdots + (X,Z^k) Z^k$ ಮತ್ತು $Z = (X,Z^{k+1}) Z^{k+1} + (X,Z^{k+2})Z^{k+2} + \cdots + (X,Z^n)Z^n$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ Y ಯು M ನಲ್ಲಿದೆ, Z ಯು $M^\perp$ ದಲ್ಲಿದೆ ಮತ್ತು $X = Y + Z$. Y^1 ಯು M ನಲ್ಲಿರುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು Z^1 ಯು $M^\perp$ ದಲ್ಲಿರುವ $X = Y^1 + Z^1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ವ್ಯವಕಲನದಿಂದ $Y - Y^1 = Z^1 - Z$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಎಡಭಾಗವು M ನಲ್ಲಿದೆ; ಬಲಭಾಗವು $M^\perp$ ನಲ್ಲಿದೆ. (7) ರಿಂದ $Y = Y^1$ ಮತ್ತು $Z = Z^1$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಟೀಕೆಗಳು : ಪ್ರಮೇಯ 15ರ ಸಾಧನೆಯು (3) ಮತ್ತು (6) ರ ಸಾಧನೆಗಳ ನೇರ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣವಾಗಿದೆ. ಸದಿಶ Y ಅನ್ನು M ಇದರ ಮೇಲಿನ X ನ ಪ್ರಲಂಬನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು Z ಅನ್ನು $M^\perp$ ದ ಮೇಲಿನ X ನ ಪ್ರಲಂಬನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಪದಕೋನ R^3ನಲ್ಲಿ ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, M ಮತ್ತು $M^\perp$ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪಸಮುಷ್ಟಿಗಳ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿ X ಅನ್ನು ಉತ್‌ಕ್ಷೇಪಿಸುವುದರಿಂದ Y ಮತ್ತು Z ಗಳನ್ನು ದೊರಕಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂಬ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವಾದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸಂಗತಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿದೆ. (ಓದುಗನು ಇದನ್ನು ಕೆಲವು ಚಿತ್ರಗಳಿಂದ ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು.) ಅಧ್ಯಾಯ 3 ರ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಲಂಬನ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಎರಡು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲಾಗಿದೆ. dim $M = k$ ಮತ್ತು $dim\ V = n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $dim\ M^\perp = n - k$ ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಯಿತು; ಅಂದರೆ,

$$\dim V = \dim M + \dim M^\perp. \tag{8}$$

ಸ್ಥಾಪಿಸಲಾದ ಎರಡನೇ ಫಲಿತಾಂಶವು ಹೀಗಿದೆ

(9) $(M^{\perp})^{\perp} = M$, ಅಂದರೆ M ನ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕದ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕವು M ಆಗಿದೆ.

ಏಕೆಂದರೆ $\{Z^1, Z^2, \ldots, Z^n\}$ ಯು, M ಗೆ $\{Z^1, Z^2, \ldots, Z^k\}$ ಒಂದು ಆಧಾರ ಆಗಿರುವಂತೆ, ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿರುವ V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $M^{\perp}$ಗೆ $\{Z^{k+1}, Z^{k+2}, Z^n\}$ ಯು ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. $M^{\perp}$ ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{Z^{k+1}, Z^{k+2}, \ldots, Z^n\}$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವು $\{Z^1, Z^2, \ldots, Z^n\}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(M^{\perp})^{\perp}$ ಗೆ $\{Z^1, Z^2, \ldots, Z^k\}$ ಯು ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುವುದು. ಇವೆರಡು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸುವುದರಿಂದ (9) ದೊರಕುತ್ತದೆ.

$M^{\perp}$ ಅನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದರಿಂದ M ಅನ್ನು ವಿವರಿಸಬಹುದೆಂದು ಗುಣಧರ್ಮ(9) ಹೇಳುತ್ತದೆ; ಅಂದರೆ, $M^{\perp}$ ದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು Yಗೆ $(X,Y)=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು M ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗೆ Vಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿದ್ದರೆ (V ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯ) ಆಗ Mಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು **ಅಥವಾ** $M^{\perp}$ ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ, V ಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿ M ಅನ್ನು ವಿವರಿಸಬಹುದು. ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯ 1 ರಲ್ಲಿ R^n ಗಾಗಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಲಾಗಿತ್ತು; ಅಲ್ಲಿ R^nನ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು, ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಂತೆ ಅಥವಾ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯಂತೆ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಲಾಯಿತು. (ಅಧ್ಯಾಯ 1 ರ ಭಾಗ 3 ನ್ನು ನೋಡಿ.)

ಪ್ರಮೇಯ 15 ರ ಇನ್ನೊಂದು ಪರಿಣಾಮವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ:

(10) M ನ ಮೇಲೆ X ನ ಪ್ರಲಂಬನ V ಯಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಅಂತರದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ X ಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪವಾಗಿರುವ, M ನಲ್ಲಿರುವ ಆ ಏಕೈಕ ಸದಿಶವಾಗಿದೆ.

Y ಯು M ನ ಮೇಲೆ X ನ ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $M^{\perp}$ ನ ಮೇಲೆ X ನ ಪ್ರಲಂಬನ Z ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $X = Y + Z$. M ನಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶವು Y^n ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $(Z,Y) = (Z,Y^1) = 0$. $Y \neq Y^1$ ಎಂದು

ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $|Y-Y^1|^2>0$ ಮತ್ತು $|X-Y^1|^2=|X-Y+Y-Y^1|^2=(X-Y+Y-Y^1, X-Y+Y-Y^1)=(Z+Y-Y^1, Z+Y-Y^1)=(Z,Z)+2(Z, Y-Y^1)+(Y-Y^1, Y-Y^1)=|Z|^2+|Y-Y^1|^2>|Z|^2=|X-Y|^2$. ಇದು (10) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ. (10) ಕ್ಕೆ ಒಂದು ನೇರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೊಡುವುದು ಸಾಧ್ಯ; ಇದನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ 15 ನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಂತಿಮ ಫಲಿತಾಂಶವು (4) ರ ಒಂದು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣವಾಗಿದೆ. f ಯು V ಯ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ-ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

(11) ಸ್ಥಾನ $(f)\leq 1$.

V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ $f(X)=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಸ್ಥಾನ $(f)=0$ ಆದ್ದರಿಂದ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ X ಗೆ $f(X)=a\neq 0$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. b ಯು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$f((b/a)X)=(b/a)f(X)=(b/a)a=b$$

ಇದು (11) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ. f ನ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಪ್ರಮೇಯ 8 ರಿಂದ,

(12) $f\neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಶೂನ್ಯತೆ $(f)=dim\ M=dim\ V-1$.

ಈಗ V ಯು ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ (X,Y) ಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು M ನ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕವು $M^{\perp}$ ಆಗಿರಲಿ.

(13) $f\neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $dim\ M^{\perp}=1$.

ಇದು (12) ಮತ್ತು (8) ರಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

X^1 ಯು $M^{\perp}$ ದಲ್ಲಿರಲಿ, $X^1\neq 0$. ಆಗ $f(X^1)\neq 0$. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ M ನಲ್ಲಿ X^1 ಇರಬೇಕಾಗುವುದು. ಇದು 17ಕ್ಕೆ ವಿರೋಧವಾಗಿದೆ.

$$Y^1=\frac{f(X^1)\,X^1}{|X^1|^2}$$

ಆಗ $M^{\perp}$ ದಲ್ಲಿ Y^1 ಇದೆ. V ಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶವು X ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ Y ಯು M ನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು $M^{\perp}$ ದಲ್ಲಿ Z ಇರುವಲ್ಲಿ $X=Y+Z$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. $M^{\perp}$ ದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆಯಾಮದ Z ಇರುವುದರಿಂದ $Z=aX^1$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. a ಏನು? $X=Y+aX^1$ ಇದರ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು X^1 ನೊಡನೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು $(X^1, Y)=0$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ

$$a=\frac{(X,X^1)}{|X^1|^2},$$

ಇದರಿಂದ

$$X=Y+\frac{(X,X^1)}{|X^2|^2}X^1 \quad \text{ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.}$$

f ಅನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ ಮತ್ತು Y ಯು M ನಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. ಹೀಗೆ

$$f(X)=f(Y)+\frac{(X,X^1)}{|X^1|^2}f(X^1)$$

$$=\frac{(X,X^1)}{|X^1|^2}f(X^1)$$

$$=\left(X,\frac{f(X^1)}{|X^1|^2}X\right)=(X,Y^1).$$

(14) ಆದ್ದರಿಂದ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ $f(X)=(X,Y^1)$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸದಿಶ Y^1 ಇದೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸುವಷ್ಟು ಇದು ಮೂಲಭೂತವೆನಿಸಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 16. V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ, V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ-ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು f ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು (X,Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ $f(X)=(X,Y^1)$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಸದಿಶ Y^1 ಇದೆ.

ಸಾಧನೆ. $f = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $Y^1 = 0$ ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿರಿ. $f \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (14), Y^1 ನ ಅಸ್ತಿತ್ವವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ $(X, Y^1) = (X, Y^2)$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಸಂಕಲನದಿಂದ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ $(X, Y^1 - Y^2) = 0$. ವಿಶೇಷವಾಗಿ $(Y^1 - Y^2, Y^1 - Y^2) = 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ $Y^1 = Y^2$. ಇದು Y^1ನ ಏಕೈಕತೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಟೀಕೆಗಳು: $Y^1 = (1, -1, 1)$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, ಇದು (4)ರ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣವಾಗಿದೆ. *ಸಾಧನೆಯ ಕೀಲಿಕೈ (13) ರಲ್ಲಿದೆ; ಅಂದರೆ, f ನ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕದ ಆಯಾಮವು 1 ಆಗಿದೆ. ಆಗ ಪ್ರಮೇಯ 15ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಯಿತು. ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನೇರವಾಗಿ ತೀರ್ಮಾನಿಸಲು ಪ್ರಮೇಯ* 14ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು.

$$X = Y + \frac{(X, X^1)}{|X^1|^2} X^1,$$

ಇಲ್ಲಿ Y ಯು X^1 ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ Y ಯು M ನಲ್ಲಿದೆ. ಇದರೊಂದಿಗೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯತೆಯ ನಿರ್ಬಂಧವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತೆಗೆದುಹಾಕಬಹುದು:

(15) (X, Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ. f ನ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕವು ಆಯಾಮ 1ನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತೆ V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ–ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ರೇಖೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಯು f ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ $f(X) = (X, X^1)$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಸದಿಶ Y^1 ಇದೆ.

ಮುಂದಿನ ಭಾಗದ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, (15) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ನಿರ್ಬಂಧಗಳನ್ನು ಮಾಡದ ಹೊರತು ಪ್ರಮೇಯ 16 ಸತ್ಯವಾಗಿಲ್ಲವೆಂದು ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 16ರ ಬಗ್ಗೆ ಒಂದು ಎಚ್ಚರಿಕೆಯ ಮಾತು. ಅಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ Y^1 ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಆಯ್ಕೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತದೆ. $\{X, Y\}$ ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತೊಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ನಾವು $f(X) = \{X, Y^2\}$, V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ

ುವಂತೆ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಸದಿಶ Y^2 ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಗಿ $Y^2 \neq Y^1$. ಇದರ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡ ಗುವುದು.

$V = R^n$ ಮತ್ತು (X, Y) ಯು R^n ಮೇಲಿನ ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣ ವಾಗಿರುವ ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ಪ್ರಮೇಯ 16ನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ನೇರವಾಗಿ ರಕಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು $n = 3$ ಆಗಿರುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. R^3 ೀಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ–ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು A ಯು f ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ A ಯು 3×1 ದೆ ಮತ್ತು $A_{11} = f(1, 0, 0)$, $A_{12} = f(0, 1, 0)$ ಮತ್ತು $A_{13} = f$ $, 0, 1)$ ಆಗಿದೆ. ಹೀಗೆ $f(x, y, z) = f(x(1, 0, 0) + y$ $, 1, 0) + z(0, 0, 1)) = xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) +$ $f(0, 0, 1) = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z = ((x, y, z), (A_{11}, A_{12},$ $_{13}))$. ಆದ್ದರಿಂದ (A_{11}, A_{12}, A_{13}) ಯು ಪ್ರಮೇಯ 16ರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ^{1} ಸದಿಶವಾಗಿದೆ. ಬೇರೆ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ $V = R^3$ ಮತ್ತು (X, Y) ು ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರುವಾಗ, ಪ್ರಮೇಯ 16 ರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ^{1} ಯು R^3 ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶದಂತೆ ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ f ನ ಮಾತೃಕೆ ಾತ್ರವಾಗಿದೆ! R^nಗೂ ಇದೇ ಫಲಿತಾಂಶವು ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರಮೇಯ ರ ನಿರೂಪಣೆ ಮತ್ತು ಸಾಧನೆಗಳು ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಅನಿರ್ದೇಶಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಡುತ್ತವೆ.

ಗಣಿತ ವಾಙ್ಮಯದಲ್ಲಿ, V ಯ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ – ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ಒಂದು **ರೇಖಾತ್ಮಕ ಫಲನೋಕ್ತಿಯು** ಥವಾ V ಯ ಮೇಲಿನ **ರೇಖಾತ್ಮಕ ರೂಪ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. V ಯ ೀಲಿನ ಎಲ್ಲ ರೇಖೀಯ ಫಲನೋಕ್ತಿಯಗಳ ಸಂಗ್ರಹವನ್ನು ಅನೇಕಸಲ V^*ಯಿಂದ ಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. V^*ಯಲ್ಲಿನ f ಮತ್ತು gಗೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಗೆ $\{f + g\} X = fX + gX$ ಮತ್ತು $\{af\}X = a(fX)$ ಎಂದು ವರಿಸುವುದರಿಂದ ನಾವು V^*ಯನ್ನು ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮುಷ್ಟಿ ವಿನ್ಯಾಸದಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸ ಹುದು. ಈ ವಿನ್ಯಾಸದೊಡನೆ V^*ಯನ್ನು V ಯ **ಉಭಯು** (ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ, ಸಂಯುಗ್ಮಿ) **ಸಮುಷ್ಟಿ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ V^*ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು f ಅನ್ನು V ಯಲ್ಲಿರುವ

ಒಂದು ಸದಿಶ Y^1 ನಿಂದ 'ಪ್ರತಿನಿಧಿಸ'ಬಹುದೆಂದು ಪ್ರಮೇಯ 16 ರಿಂದ ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ. (V ಯು ಸಾಂತ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು ಅಭಿಗೃಹೀತ). ಈ 'ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯ'ವು ನಮ್ಮ ಬಹುಭಾಗ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಮೂಲಭೂತವಾಗಿದೆ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ V^*ನ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಗೊಂದಲ ಉಂಟಾಗುವುದರಿಂದ V^*ನ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಕೈಬಿಡಲಾಗುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. R^n ಮೇಲಿನ ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಕೆಳಗಿರುವ R^nನ M ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (a) $\{(1, 0, 1), (2, -1, 1)\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ R^3ನ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ M ಆಗಿದೆ.

   (b) $x + y - z + w = 0$ ಮತ್ತು $2x = y$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, (x, y, z, w) ರೂಪದ ಎಲ್ಲ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ, R^4ನ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿದೆ.

   (c) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ರೂಪದ ಎಲ್ಲ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ R^nನ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿದೆ.

   (d) $\{(1, 0, 1, 1), (1, 0, -1, 1)\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ R^4ನ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿದೆ.

   (e) ಕೆಳಗಿರುವುದರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿದೆ.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. R^3ನ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು R^3 ಯು ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಲ್ಲಿ, Mಗೆ ಮತ್ತು $M^\perp$ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) ಕೆಳಗಿರುವುದರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿದೆ

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) $\{(1, 1, 1)\}$ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿದೆ.

(c) $x+2y+3z=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ (x, y, z) ಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು M ಆಗಿದೆ.

3. ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ ಒಂದು ಸದಿಶದ ಪ್ರಲಂಬನವನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ 15 ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. R^3ಮೇಲಿನ ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೊಂಡು ಅಭ್ಯಾಸ 2 ರ M ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮೇಲೆ $(1, -1, 0)$ ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ವಿಧಾನ ವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.

4. $((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1x_2 + (x_1+y_1)(x_2+y_2) + (x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು R^3 ಹೊಂದಿರಲಿ. ಈ ಆಂತರಿಕ ಗುಣ ಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಅಭ್ಯಾಸ 2 ರ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಅಭ್ಯಾಸ 4 ರಲ್ಲಿ R^3 ಮೇಲಿನ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಅಭ್ಯಾಸ 2 ರ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳು M ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮೇಲೆ $(1,-1,0)$ ಯ ಪ್ರಲಂಬನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $f(x,y,z)=3x-y$ ಯಿಂದ R^3 ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು f ಆಗಿರಲಿ.

(a) (X, Y)ಯು ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದ್ದರೆ, $f(X) = (X, Y)$ ಆಗಿರುವಂತೆ, R^3ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸದಿಶ Yಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) ಅಭ್ಯಾಸ 4 ರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವು (X, Y) ಆಗಿದ್ದರೆ $f(X) = (X, Y)$ ಆಗಿರುವಂತೆ, R^3ನಲ್ಲಿ ಒಂದ ಸದಿಶ Y ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : ಅಂತಹ ಒಂದು Y ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ 16 ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.]

7. V ಯು ಸ್ತರ ≤ 2 ರ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. (f, g)ಯು $(f g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ V ಯ ಮೇಲಿನ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ.

(a) $\{1 + t\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) (a) ಯ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿ t^2 ಅನ್ನು ಪ್ರಲಂಬಿಸಿರಿ.

(c) $Tf = f(2)$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ V ಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು T ಆಗಿರಲಿ. $Tf = (f, g)$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸದಿಶ g ಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. (X, Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ.

(a) $V^{\perp} = \{0\}$ ಮತ್ತು $\{0\}^{\perp} = V$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) ಲಂಬೀಯಪೂರಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನು ಹೀಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. V ಯ ಯಾವುದೇ ಉಪಗಣವು M ಆಗಿರಲಿ (ಇದು ಅವಶ್ಯಕ ವಾಗಿ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲೇಬೇಕಿಲ್ಲ). M ನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ Y ಗಳಿಗೆ $(X, Y) = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು $M^{\perp}$ ಆಗಿದೆ. V ಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು $M^{\perp}$ ಆಗಿದೆ.

(c) V ಯು ಸಾಂತ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು V ಯ ಒಂದು ಉಪಗಣವು M ಆಗಿರಲಿ. M ನಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪ

ಸಮಷ್ಟಿಯು $(M^\perp)^\perp$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : M ನಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು M_1 ಆಗಿರಲಿ. $M_1^\perp = M^\perp$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ ಮತ್ತು (9) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

9. (X, Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ.

(a) ಕೆಳಗಿನ ಸಾಮ್ಯಕವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.
$2|X - \frac{1}{2}(Y + Z)|^2 + \frac{1}{2}|Y - Z|^2 = |X - Y|^2 + |X - Z|^2$.

(b) X ನಿಂದ Y ಗಿರುವ ಅಂತರವು X ನಿಂದ Z ಗೆ ಇರುವ ಅಂತರದಷ್ಟೇ ಇರಲಿ. $Y \neq Z$ ಆಗಿದ್ದರೆ, Y ಅಥವಾ Z ಗಳೆರಡಕ್ಕಿಂತಲೂ ಬಿಂದು $\frac{1}{2}(Y + Z)$ X ಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಹತ್ತಿರವಾಗಿದೆ. [**ಸೂಚನೆ** : (a)ಯಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮ್ಯಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(c) V ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಪೀನಮಧ್ಯ ಗಣವು M ಆಗಿರಲಿ. V ಯಲ್ಲಿರುವ, ಆದರೆ M ನಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವು X ಆಗಿರಲಿ. X ಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಹತ್ತಿರವಾಗಿರುವ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಬಿಂದು ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : (b) ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

10. V ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಪೀನಮಧ್ಯಗಣವು M ಆಗಿರಲಿ. M ನಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು X ಆಗಿರದಿದ್ದರೆ, Mನಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು X ಅನ್ನು M ನ **ಚರಮಬಿಂದು** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ M ನಲ್ಲಿರುವ Y ಮತ್ತು Z ಗಳಿಗೆ $X = \frac{1}{2}(Y + Z)$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದು $X = Y$ ಮತ್ತು $X = Z$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಬಂಧಿಸಿದೆ. D ಯಲ್ಲಿರುವ X ಗೆ ಮತ್ತು M ನಲ್ಲಿರುವ Y ಮತ್ತು Z ಗೆ, $X = \frac{1}{2}(Y + Z)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, M ನ ಒಂದು ಉಪಗಣ D ಯನ್ನು M ನ ಒಂದು **ಚರಮೀಯ ಉಪಗಣ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು; Y ಮತ್ತು Z ಗಳು D ಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಬಂಧಿಸಿದೆ; ಅಂದರೆ, D ಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು D ಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿರುವ M ನಲ್ಲಿರುವ ರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಲಾರವು.

(a) $x^2+y^2 \leq 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ, R^2ನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ (x, y) ಬಿಂದುಗಳ ಗಣದ ಚರಮ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) $-1 \leq x \leq 1$ ಮತ್ತು $0 \leq y \leq 3$ ಆಗಿರುವಂತೆ R^2ನಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲ (x, y) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ ಪೀನಮಧ್ಯಗಣವು M ಆಗಿರಲಿ. M ನ ಚರಮೀಯ ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(c) V ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಪೀನಮಧ್ಯಗಣವು M ಆಗಿರಲಿ. V ಯ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ-ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು f ಆಗಿರಲಿ. M ನ ಮೇಲೆ f ಒಂದು ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ; ಅಂದರೆ, M ನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ $fX_0 \geq fX$ ಆಗಿರುವಂತೆ M ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದು X_0 ಇದೆ. $\delta = fX_0$ ಆಗಿರಲಿ. $fX = \delta$ ಆಗಿರುವಂತೆ M ನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಗ್ರಹ Y, ಇದು M ನ ಚರಮೀಯ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(d) $f(x,y) = 3x + 2y$ ಮತ್ತು $g(x,y) = 6y$ ಆಗಿರಲಿ. (b) ಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪೀನಮಧ್ಯ ಗಣವು M ಆಗಿರಲಿ. f, g ಮತ್ತು $g-3f$ ಗಳು M ನ ಮೇಲೆ ಅವುಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಲ್ಲಿ, M ನಲ್ಲಿ (x,y) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳ ಒಂದು ಸಂಗ್ರಹ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ **ಪೀನಮಧ್ಯ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯು** $1 \leq i \leq k$ ಗೆ $x_i \geq 0$ ಮತ್ತು $x_1 + x_2 + \cdots + x_4 = 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ $X = x_1X^1 + x_2X^2 + \cdots + x_kX^k$ ಗಳ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿದೆ.

(a) $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪೀನಮಧ್ಯ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯು ಒಂದು ಪೀನಮಧ್ಯಗಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) $\{(1, 1), (\frac{1}{2}, 2), (-1, 2), (-2, -4), (\frac{1}{4}, -5), (\frac{3}{4}, -1)\}$ ನಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪೀನಮಧ್ಯ ಬಹುಭುಜಾ

ಕೃತಿಯನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸಲು ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(c) $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪೀನಮಧ್ಯ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯು M ಆಗಿರಲಿ. ಕೇವಲ ಯಾವುದಾದರೂ $i, 1 \leq i \leq k$ ಗೆ $X = X^i$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ M ನ ಚರಮ ಬಿಂದುವು X ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(d) ಭಾಗ (c)ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ M ಇರಲಿ ಮತ್ತು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ–ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು f ಆಗಿರಲಿ. M ನ ಮೇಲೆ f ನ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು ಯಾವುದಾದರೂ $X^i, 1 \leq i \leq k$ ಗೆ ಸ್ಥಾಪಿಸಲ್ಪಡುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ**: $i \geq 1$ ಗೆ, $f(X^1) \geq f(X^i)$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $x_i \geq 0$ ಯೊಡನೆ $X = x_1X^1 + x_2X^2 + \cdots + x_kX^k$ ಮತ್ತು $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(X) > f(X^1)$ ಆಗಿರಬಹುದೇ? ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ರೇಖೀಯ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ [illegible]ವು **ವಿಧಾನ** ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಕೇಂದ್ರ[illegible]ವಾಗಿದೆ.]

(e) ಭಾಗ (b) ಯಲ್ಲಿರುವ ಗಣವು M ಆಗಿರಲಿ. ಭಾಗ (d)ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, M ಮೇಲಿನ $f(x,y) = 3x - y$ ಮತ್ತು $g(x,y) = 3y$ ಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಭಾಗ 5. ಪರಿಕರ್ಮಿಯೊಂದರ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ 16 ರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮಾಡಲಾಗುವುದು. ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು, ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಡನೆ 'ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ' ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ಹೊಸ ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಹೊಸ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು ಒಂದು ಸರಳ ಮಾತೃಕೆ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಗಣನೀಯ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಮತ್ತು ಗಣನಾತ್ಮಕ ಸ್ವಾರಸ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಎರಡು–ಆಯಾಮದ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಡನೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ.

T ಯು R^2 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ಯು}$$

T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ,

(1) $T(x,y) = (x',y')$, ಇದು ಕೇವಲ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

T ಯೊಡನೆ ಆಪ್ತವಾಗಿ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿಯು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ T^* ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ.

(2) $T^*(x,y) = (x',y')$, ಇದು ಕೇವಲ $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

A ಯ ನೀಟಸಾಲು ಮತ್ತು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳೆರಡನ್ನೂ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ, A ಯಿಂದ T^* ನ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ದೊರಕಿಸಿದೆ. (ಇದನ್ನು A ಯಿಂದ T^* ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು A ಯ ಕರ್ಣರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಪ್ರತಿಫಲದಿಂದ ದೊರಕಿಸಿದೆ ಎಂದೂ ಕೂಡ ವಿವರಿಸಬಹುದು.) T ಮತ್ತು T^* ಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. $((x,y)(x_1,y_1))$ ಯು R^2 ಮೇಲಿನ ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಕೆಳಗಿನ ಸಾಮ್ಯಕವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ:

(3) $(T(x_1,y_1),(x_2,y_2)) = ((x_1,y_1), T^*(x_2,y_2))$.

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇದನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು. ಇದರಿಂದ $T(x_1,y_1) = (ax_1+by_1,(cx_1+dy_1)$, ಮತ್ತು $T^*(x_2,y_2) = (ax_2+cy_2, bx_2+dy_2)$. $((ax_1+by_1, cx_1+dy_1),(x_2,y_2)) = ax_1x_2+by_1x_2+cx_1y_2+dy_1y_2 = ((ax_2+cy_2,bx_2+dy_2),(x_1 y_1))$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ (3) ಸಾಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಗಣನೆಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸುಲಭಗೊಳಿಸಲು, R^2 ನಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶವನ್ನು ದೊಡ್ಡಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸೋಣ ಮತ್ತು (X,Y) ಯನ್ನು R^2 ಮೇಲಿನ ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ

ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ. ಆಗ (3) ಹೀಗಾಗುತ್ತದೆ:

(4) $(TX, Y) = (X, T^*Y)$ R^2ನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ.

(4) ರ ಒಂದು ಪರಿಣಾಮವು ಇಂತಿದೆ :

(5) T ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ T^*ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು $M^\perp$ ಆಗಿದೆ.

(5) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು T^*ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ Y^1 ಇರಲಿ ಮತ್ತು $T^*Y = Y^1$ ಆಗಿರುವಂತೆ R^2 ನಲ್ಲಿ Y ಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿರಿ. Tಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ X ಇರಲಿ. ಆಗ $TX = 0$. ಸಮೀಕರಣ (4) ರಿಂದ $(TX, Y) = (X, T^*Y)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $0 = (0, Y) = (TX, Y) = (X, T^*Y) = (X, Y^1)$. ಇದು T^*ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸದಿಶವೂ T ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸದಿಶಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ; ಅಂದರೆ T^* ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು $M^\perp$ ನಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಪ್ರಮೇಯ 8 ರ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಟೀಕೆಯಿಂದ ಸ್ಥಾನ (T) = ಸ್ಥಾನ (T^*) ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. [ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 4 ರ (28) ನ್ನು ನೋಡಿ.] ಅದೂ ಅಲ್ಲದೆ ಪ್ರಮೇಯ 8 ರಿಂದ ಸ್ಥಾನ $(T) = dim\ R^2 - dim\ M$ ಎಂದಿದೆ. ಭಾಗ 4 ರ (8) ರಿಂದ ಸ್ಥಾನ $(T) = dim\ M^\perp$.. ಹೀಗೆ ಸ್ಥಾನ $T^* = dim\ M^\perp$. T^*ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು $M^\perp$ನಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಆಯಾಮವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ, (5) ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುವುದು.

ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ (2) ರ ಕೆಲವು ಪರಿಣಾಮಗಳು ಹೀಗಿವೆ

(a) $(T^*)^* = T$,

(6) (b) $(S+T)^* = S^* + T^*$,

(c) $(aT)^* = aT^*$, ಇಲ್ಲಿ a ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ,

(d) $(ST)^* = T^*S^*$.

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು (2) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು.

(6d) ಯನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸೋಣ.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

S ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ST ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ

$$\begin{bmatrix} a_1a+b_1c & a_1b+b_1d \\ c_1a+d_1c & c_1b+d_1d \end{bmatrix}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $(ST)^*$ ನ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ

$$\begin{bmatrix} a_1a+b_1c & c_1a+d_1c \\ a_1b+b_1d & c_1b+d_1d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix},$$

ಇದು S^* ಮಾತೃಕೆಯು T ಮಾತೃಕೆ ಸಲದಷ್ಟಿದೆ. ಇದು (6d) ಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ.

V ಯಲ್ಲಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ಈ ಎಲ್ಲ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನೂ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಬಹುದು. ಇದರ ಬದಲಾಗಿ T^* ಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲು ಮತ್ತು ಅದರ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ದೊರಕಿಸಲು (4) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸ ಲಾಗುವುದು. ಇದರಿಂದ ಸಾಧನೆಯು ಸರಳವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಕಡಮೆ ಜಟಿಲತೆಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳುಂಟಾಗುತ್ತವೆ.

V ಯು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮದ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ ಮತ್ತು (X,Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. Y ಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $fX = (TX, Y)$ ಆಗಿರಲಿ. f ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಎನ್ನುವುದು $f(aX^1+bX^2) = (T(aX^1+bX^2), Y) = (aTX^1+bTX^2, Y)$ $= a(TX^1, Y)+b(TX^2, Y) = afX^1+bfX^2$ ನಿಂದ ತೋರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಈಗ f ಗೆ ಪ್ರಮೇಯ 16 ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು

(7) V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ, $f(X) = (X, Y^1)$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಸದಿಶ Y^1 ಇದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

Y^1 ಯು f ನಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುವುದರಿಂದ (ಇದು Y ಮತ್ತು T ಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ), V ಯಿಂದ V ಗೆ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದ್ದಾಗಿದೆ. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಈ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು T^* ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲಾಗುವುದು ('T–ನಕ್ಷತ್ರ' ಅಥವಾ 'T–ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ' ಎಂದು ಓದಲಾಗುವುದು). ಇದನ್ನು (X,Y) ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ T ಯ **ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. T^* Y ಯು, ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದಿಂದ, ಸದಿಶ Y^1 ಆಗಿದೆ, ಇದು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ X ಗಳಿಗೆ $(TX,Y)=(X,Y^1)$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧದಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಬೇರೆ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ T^* Y ಯು ಕೆಳಗಿರುವ ನಿರ್ಬಂಧದಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ,

(8) V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ $(TX,Y)=(X,T^*Y)$

T^*ಯು ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ a, b ಗಳು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲು ಮತ್ತು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ Y^2 ಮತ್ತು Y^3ಗೆ, $T^*(aY^2+bY^3)=aT^*Y^2+bT^*Y^3$ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತೇವೆ. $T^*(aY^2+bY^3)$ ಯು, $(X,T^*(aY^2+bY^3))=(TX,aY^2+bY^3)$ ಆಗಿರುವಂತೆ Vಯಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶವೇ $T^*(aY^2+bY^3)$ ಆಗಿದೆ. $(TX,aY^2+bY^3)=a(TX,Y^2)+b(TX,Y^3)(TX,Y^2)=(X,T^*Y^2)$. ಮತ್ತು $(TX,Y^3)=(X,T^*Y^3)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ, $(X,T^*(aY^2+bY^3))=(X,aT^*Y^2+bT^*Y^3)$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ $T^*(aY^2+bY^3)=aT^*Y^2+bT^*Y^3$. ಇದು T^*ಯು ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

(8) ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ Tಯ ಪರಿಣಾಮವನ್ನು ಸ್ಥಾನಾಂತರಿಸುವ ಒಂದು ಸಾಧನ ಮಾತ್ರವಾಗಿದೆ. T ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಒಂದು ಪಾರ್ಶ್ವದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಪಾರ್ಶ್ವಕ್ಕೆ ಪಲ್ಲಟಿಸುವಾಗಲೆಲ್ಲ, ಅದನ್ನು T^*ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತೇವಷ್ಟೆ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದರಿಂದ ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸೋಣ. [(6) ರೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಿ.]

(9)
- **(a)** $(T^*)^*=T$
- **(b)** $(S+T)^*=S^*+T^*$
- **(c)** $(aT)^*=aT^*$ ಇಲ್ಲಿ a ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.
- **(d)** $(ST)=T^*S^*$

ಇದರಿಂದ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ $(TX,Y)=(X,T^*Y)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅದೂ ಅಲ್ಲದೆ $(X,T^*Y) = (T^*Y,X)$ ಮತ್ತು (8)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಲ್ಲಿ $(T^*Y,X)=(Y,(T^*)^*X)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $(TX,Y)=(Y,(T^*)^*X^*)=((T^*)^*X,Y)$ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ. $T=(T^*)^*$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ,

(10) V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ $(T_1X,Y)=(T_2X,Y)$ ಆಗಿರುವಂತೆ, V ಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು T_1 ಮತ್ತು T_2 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $T_1=T_2$.

ಸಿರ್ಬಂಧ $(T_1X,Y)=(T_2X,Y)$ ಇದು

V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ $((T_1-T_2)X,Y)=0$. ಇರುವಂತೆಯೇ ಇದೆ.

$Y=(T_1-T_2)X$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $|(T_1-T_2)X|^2=((T_1-T_2)X,(T_1-T_2)X)=0$, V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $T_1X=T_2X$ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ. ಇದು (10)ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತದೆ, ಇದರಿಂದ $(9a)$ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

$(9b)$ ಮತ್ತು $(9c)$ ಯ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಗಾಗಿ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ. $(9d)$ ಯನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ. $(X,(ST)^*Y)=((ST)X,Y)=(S(TX),Y)=(TX,(S^*Y))=(X,(T^*S^*)Y))$ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ ಎಂದಿರುವುದರಿಂದ ನಾವು (10) ರಿಂದ, $(ST)^*=T^*S^*$, ಇದು $(9d)$ ಆಗಿದೆ, ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

T ಯ ಮತ್ತು T^*ನ ಮಾತೃಕೆಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧವು ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇದು (1) ಮತ್ತು (2) ರ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ ಸದೃಶವಾಗಿದೆ. $\{X^1,X^2,\ldots,X^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. A ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ B ಯು T^* ದ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ, ಆಗ $TX^j=A_{1j}X^1+A_{2j}X^2+\cdots+A_{nj}X^n$, $j=$

$1, 2, \ldots, n$ ಗೆ; ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಭಾಗ 3 ರ (8) ಇದರಿಂದ $TX^j = (TX^j, X^1)X^1 + (TX^j, X^2)X^2 + \cdots + (TX^j, X^n)X^n, j = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ ಎಂದಿದೆ. ಇದರಿಂದ

(11) Vಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವು $\{X^1 X^2, \ldots, X^n\}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು Aಯು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ Tಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $i = 1, 2, \ldots, n$ ಮತ್ತು $j = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ ಇರಲು $A_{ij} = (TX^j, X^i)$

$\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T^*ದ ಮಾತೃಕೆ Bಗೆ ನಾವು (11) ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ. ಇದರಿಂದ $B_{ij} = (T^*X^j, X^i) = (X^j, TX^i) = (TX^i, X^j) = A_{ji}$; ಅಂದರೆ, B ಯು A ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ನೀಟಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ, A ಯಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. B ಯು ಒಂದು ಹೆಸರನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ, A ಯು ಒಂದು $m \times n$ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $B_{ij} = A_{ji}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ಮತ್ತು $j = 1, 2, \ldots, n$ ನಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ $n \times m$ ಮಾತೃಕೆ B ಯನ್ನು A ಯ **ಸ್ಥಾನ ಪಲ್ಲಟನ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಮಾತೃಕೆ B ಯನ್ನು A'ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ('A-ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟನ' ಎಂದು ಓದಲಾಗುವುದು). ಈ ಪದಕೋಶದಲ್ಲಿ ಫಲಿತಾಂಶವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ,

(12) ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ A ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ A'ಯು ಅದೇ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T^*ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

(5) ರ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ,

ಪ್ರಮೇಯ 17. V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು (X, Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. T ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು T^*ದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು N ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $M^\perp = N$.

ಸಾಧನೆ: ಈ ಸಾಧನೆಯು ಕೆಲವು ಮಾರ್ಪಾಡುಗಳೊಡನೆ (5) ರ ಸಾಧನೆಗೆ ಸದೃಶವಾಗಿದೆ. Y^1 ಯು M ನಲ್ಲಿರಲಿ ಮತ್ತು $T^*Y = Y^1$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯಲ್ಲಿ N ಅನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿ. M ನಲ್ಲಿ X ಇರಲಿ. ಆಗ $TX = 0$. ಅಂದರೆ $0 = (0, Y) = (TX, Y) = (X, T^*Y) = (X, Y^1)$. ಇದು $M^\perp$ ದಲ್ಲಿ

N ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. $N = M^{\perp}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು ನಾವು ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು

(3) V ಯು ಪ್ರಮೇಯ 17 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇರಲಿ. M_1 ಮತ್ತು M_2 ಗಳು V ಯ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. M_1 ಯು M_2 ನಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $M_1 \neq M_2$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $M_1^{\perp}$ ದಲ್ಲಿ X^2 ಇರುವಂತೆ ಮತ್ತು $X^2 \neq 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ M^2ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸದಿಶ X^2 ಇದೆ.

(13) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು M_1ನಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿರುವ, M_2ನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಒಂದು ಸದಿಶವು X ಆಗಿರಲಿ. ಹೀಗೆ X^1ಯು M ನಲ್ಲಿರುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು X^2ಯು $M_1^{\perp}$ ದಲ್ಲಿರುವಲ್ಲಿ $X \neq 0$ ಮತ್ತು $X = X^1 + X^2$. ಆದ್ದರಿಂದ $X^2 \neq 0$ (ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ M_1ನಲ್ಲಿ X ಇರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ) ಮತ್ತು X^2 ಯು M_2 ನಲ್ಲಿದೆ (M^2 ನಲ್ಲಿರುವ $X^2 = X - X^1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ). ಇದು (13) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತದೆ.

$N \neq M^{\perp}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $X^2 \neq 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತು $N^{\perp}$ ದಲ್ಲಿ X^2 ಇರುವಂತೆ $M^{\perp}$ ದಲ್ಲಿ X^2 ಅನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ $(X^2 T^* Y) = 0$ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ Y ಗಳಿಗೆ. $(X^2, T^* Y) = (TX^2, Y)$ ಆಗುವುದರಿಂದ, $(TX^2, Y) = 0$, V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ Y ಗಳಿಗೆ ವಿಶೇಷವಾಗಿ $(TX^2, TX^2) = 0$ ಅಂದರೆ, $TX^2 = 0$. ಹೀಗೆ X^2 ಯು Nನಲ್ಲಿದೆ. ಇದು ಒಂದು ವಿರೋಧಾಭಾಸವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $N = M^{\perp}$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುವುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 17, ಈ ಕೆಳಗಿರುವುದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ, ಇದನ್ನು (12) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು.

(14) ಸ್ಥಾನ $(T) =$ ಸ್ಥಾನ (T^*).

ಇದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 17ರ ಅಂಕನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಸ್ಥಾನ $(T) =$ $dim\ V - dim\ M = dim\ M^{\perp} = dim\ N =$ ಸ್ಥಾನ (T^*).

ಟೀಕೆಗಳು : ಗಣನೆಯಲ್ಲಿ, (12) ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ (8) ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಕೆಲವು ಗಣನೆಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ (8),

12) ಕ್ಕಿಂತ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. ಕೆಲವು ಬಾರಿ, ವಿಶೇಷವಾಗಿ Tಯು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವಾಗ, (8) ರಿಂದ T^*ದ ಸರಳ ವಿವರಣೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ T ಯು R^2ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನ θ ದಷ್ಟು ಒಂದು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ಕ್ರಮದ ಆವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ T^*ವು (ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣ ಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ) $-\theta$ ಕೋನದಷ್ಟು ಒಂದು ಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ಕ್ರಮದ ಆವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು (8) ರಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ $T^* T = I$, ಅಂದರೆ $T^* = T^{-1}$.

$T^* = T^{-1}$ ಆಗುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿ Tಯನ್ನು **ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯ 4ರಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲಾಗುವುದು. $T^* = T$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಇರುವ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿ T ಯನ್ನು ಒಂದು **ಸಮಾಂಗ ಪರಿಕರ್ಮಿ** ಎಂದು, $T^* = -T$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿ T ಯನ್ನು **ವಿಷಮಸಮಾಂಗ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ನಾವು ಇದೇ ಪದಕೋಶವನ್ನು ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ: $A^t = A^{-1}$ ಆಗಿದ್ದರೆ A ಯು **ಲಂಬೀಯ**; $A^t = A$ ಆಗಿದ್ದರೆ A ಯು ಸಮಾಂಗ; ಮತ್ತು $A^t = -A$ ಆಗಿದ್ದರೆ A ಯು **ವಿಷಮ ಸಮಾಂಗ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. **ಸಮಾಂಗ ಪರಿಕರ್ಮಿ**ಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯ 3ರಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲಾಗುವುದು. ಕೆಳಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶ ಕುತೂಹಲಕಾರಿಯಾಗಿದೆ.

(15) $T_1 = T_1^*$ ಮತ್ತು $T_2 = -T_2^*$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $T = T_1 + T_2$. Tಗೆ ಈ ಪದೋಕ್ತಿಯು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ.

(15) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 17ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಮಾಡಲು (13) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಯಿತು. ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 4ರ (28) ಮತ್ತು (12) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ (14) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು. ಆಗ ಪ್ರಮೇಯ 17ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಲು (14) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು. [ಆಗ ಸಾಧನೆಯು (5) ರ ಸಾಧನೆಯ ನಕಲಿನಂತಾಗುತ್ತದೆ.]

V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿದ್ದಾಗ (8) ರ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. V ಯು ಅನಂತ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರುವಾಗ, (7) ಅನ್ವಯವಾಗದಿರಬಹುದು. ಅನೇಕ ಮಹತ್ವದ ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿ, (7) ಸಾಧಾರವಾಗಿರಬಹುದು. (8) ಸಫಲವಾಗುವಂತೆ V ಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ T^* ಇದ್ದರೆ, ಆಗ T ಯು T^* ಎಂಬ ಹೆಸರಿನ ಒಂದು ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳು

ತ್ತೇವೆ. ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಅನಂತಆಯಾಮದ ಕೆಲವು ಪ್ರಸಂಗಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. R^3 ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವ ಪ್ರತಿ T ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿಗೆ T^* ಅನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ. ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಉಪ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಿಗೆ ಆಧಾರಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ಪ್ರಮೇಯ 17 ಕೆಳಗಿರುವ ಪ್ರತಿ ಪರಿಕರ್ಮಿಯೂ ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆಂದು ತಾಳೆ ನೋಡಿರಿ.

    (a) $T(x, y, z) = (x, x+y, x+y+z)$

    (b) T ಯು Y – ಅಕ್ಷದ ಸುತ್ತ $\pi/4$ ಕೋನದಷ್ಟು ಒಂದು ಆವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ.

    (c) T ಯು xz ಸಮತಲದ ಮೂಲಕ ಹಾಯ್ದಿರುವ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಫಲಿಸುತ್ತದೆ.

    (d) T ಯು $y = x$ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿ ಪ್ರಲಂಬಿಸುತ್ತದೆ.

    (e) $T(x, y, z) = (y+2z, -x+3z, -2x-3y)$

2. R^2 ಯು $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರಲಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು T ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿಗೆ T^* ಅನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ. [ಬಹುಶಃ ಸಮೀಕರಣ (8)ರ, ಉಪಯೋಗ ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭವಾಗಿದೆ.]

    (a) $T(x, y) = (x - y, y)$

    (b) $T(x, y) = (0, x+y)$

3. V ಯು ಸ್ತರ ≤ 2ರ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. V ಯು $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ ಯಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. [ಸೂಚನೆ: ಭಾಗ (4)ರ

ಅಭ್ಯಾಸ 7(*c*)ಯನ್ನು ಮತ್ತು ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ, ಉಪಯೋಗಿಸಿ.]

(a) $(T_1 f)(t) = (d/dt) f(t)$

(b) $(T_2 f(t) = t(d/dt) f(t)$

(c) $(T_3 f)(t) = (d/dt) t f(t)$

(d) $(T_4 f)(t) = \int_0^t f(u) du$

(e) $(T_5 f)(t) = \int_0^1 (t+u)^3 f(u) du$

4. ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿರುವಂತೆ ಅಭ್ಯಾಸ 2 ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (ಅಭ್ಯಾಸ 2 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ). ಆ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಗಳಿಗೂ ಮಾತೃಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. V, (f, g) ಮತ್ತು T_1, T_2, T_3, T_4 ಮತ್ತು T_5 ಗಳು ಅಭ್ಯಾಸ 3 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ.

(a) $T_1^* T_2$ (b) $T_1 (T_2)^*$

(c) $(T_1 T_2)^*$ (d) $(T_1 T_2 T_3 T_4 T_5)^*$

(e) $T_5^* + T_5$

6. V ಯು $(A, B) = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{12} + A_{21} B_{21} + A_{22} B_{22}$ ಯಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಡನೆ 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಷ್ಟಿ ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : (8) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಗಣಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ಸರಳತರ ವಿಧಾನವು, $(A, B) = tr(B^t A)$ ಎಂದು ಗಮನಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 6ರ ಅಭ್ಯಾಸ 15 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಆಗಿದೆ.]

(a) $TA = CA$, ಇಲ್ಲಿ C ಯು ಒಂದು 2×2 ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

(b) $TA = AC - CA$, ಇಲ್ಲಿ C ಯು ಒಂದು 2×2 ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

(c) $TA = AC + CA$, ಇಲ್ಲಿ C ಯು ಒಂದು 2×2 ಮಾತೃಕೆ ಯಾಗಿದೆ.

7. V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. ಕೇವಲ T^*ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : ಪ್ರಮೇಯ 17, $(9d)$ ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 10, ಪ್ರಯೋಜನಕಾರಿಯಾಗಿವೆ.]

8. (a) $(9b)$ ಮತ್ತು $(9c)$ ಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

   (b) (15) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : $T_1 = (T + T^*)/2$ ಮತ್ತು $T_2 = (T - T^*)/2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

9. (a) *ಅಭ್ಯಾಸ 1 ರ ಯಾವ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು ಸಮಾಂಗವಾಗಿವೆ? ಯಾವುವು ವಿಷಮ ಸಮಾಂಗವಾಗಿವೆ? ಯಾವುವು ಲಂಬೀಯ ವಾಗಿದೆ? ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ಮತ್ತು ವಿಷಮ ಸಮಾಂಗ ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಮೊತ್ತದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.*

   (b) ಅಭ್ಯಾಸ 2 ರಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿಯನ್ನೂ ಅಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ಮತ್ತು ಒಂದು ವಿಷಮ ಸಮಾಂಗ ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಮೊತ್ತದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.

10. V ಯು, $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಡನೆ $0 \le t \le 1$ ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು f ನ ಸಮಷ್ಟಿ ಯಾಗಿರಲಿ. T ಯು, $K(t,S)$ ಯು $0 \le t \le 1$ ಮತ್ತು $0 \le s \le 1$ ಗಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ–ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, $(Tf)(t) = \int_0^1 K(t,s) f(s)$ ds ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ, V ಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ.

(a) T^* ಯು $(T^* f)(t) = \int_0^1 K(s,t) f(s) ds$ ಯಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, ಆಗ T^*ಯು T ಯ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) ಕೇವಲ $K(t,s) = K(s,t)$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

11. ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವು $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ ಯಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವುದರ ಜತೆಗೆ V ಯು ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ.

(a) $F(f) = f(1)$ ಯಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ V ಯ ಮೇಲಿನ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯು F ಆಗಿರಲಿ. $F(f) = (f,g)$ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ f ಗಳಿಗೆ ಆಗಿರುವಂತೆ, V ಯಲ್ಲಿ g ಸದಿಶ **ಇಲ್ಲ** ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ**: V ಯಲ್ಲಿ $F(f) = (f, g)$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು g ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $f(1) = 0$ ಆಗಿರುವ ಎಲ್ಲ f ಗಳಿಗೂ $(f,g) = 0$. $F(1) \neq 0$, $g \neq 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $((1-t)^2 g, g) = 0$ ಆದ್ದರಿಂದ $(1-t)g = 0$].

(b) $(Tf)(t) = (d/dt) f(t)$ ಯಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ V ಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು T ಆಗಿರಲಿ. T ಯ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಯು **ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿ** ಇಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ**: T^* ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಭಾಗಗಳ ಅನುಕಲನದಿಂದ $f(T^*g) = f(1)g(1) - f(0)g(0) = (f, Tg)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $(f, (T+T^*)g) = f(1)g(1) - f(0)g(0)$ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ f ಮತ್ತು g ಗಳಿಗೆ. $g(t) = t$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಭಾಗ (a) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

12. R^2ಯು ಅಭ್ಯಾಸ 2 ರ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರಲಿ ಮತ್ತು T ಯು R^2 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ T^*ನ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ವಿಶೇಷ ಅಭ್ಯಾಸ

A ಮತ್ತು B ಗಳು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವುವು ಸಮಾನಾರ್ಥಕಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(a) A ಮತ್ತು B ಗಳು ಒಂದೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಸಂಕ್ಷೋಚಿಸಿದ ಸೋಪಾನ ವ್ಯೂಹ ಮಾತೃಕೆಗೆ ಸಂಕ್ಷೋಚಿಸಲ್ಪಡಬಹುದು.

(b) A ಮತ್ತು B ಗಳು ಒಂದೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

(c) A ಮತ್ತು B ಗಳು ಒಂದೇ ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

(d) P_0 ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುವಲ್ಲಿ $A = P_0 B$.

[**ಸೂಚನೆಗಳು** : (a) ಯು (b) ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು ಅಧ್ಯಾಯ 1 ರ ಭಾಗ 3 ರ (36) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ. (b) ಯು (c) ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು A^t ಮತ್ತು B^t ಗಳು ಒಂದೇ ನೀಟಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. ಅನಂತರ ಪ್ರಮೇಯ 17 ಮತ್ತು 8 ರ ಮೇಲಿನ ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. (c) ಯು (d) ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು A (ಮತ್ತು B) ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಆಗಿರುವಂತೆ, R^nಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{X^1, X^2, \ldots, X^k, X^{k+1}, \ldots, X^n\}$ ಆಗಿರಲಿ. ತನ್ನ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು A ಆಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು S ಆಗಿರಲಿ, ತನ್ನ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು B ಆಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು T ಆಗಿರಲಿ. ಪ್ರಮೇಯ 8 ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಗಣ $\{TX^{k+1}, TX^{k+2}, \ldots, TX^n\}$ ವು ನಿರವಲಂಬಿತ ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಗಿತ್ತು. R^n ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{Z^1, Z^2, \ldots, Z^k, TX^{k+1}, \ldots, TX^n\}$ ಆಗಿರಲಿ. P ಯು, $PZ^i = Z^i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ ಮತ್ತು $P(TX^j) = SX^j$, $j = k+1, \ldots, n$ ನಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. P ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ ಮತ್ತು P_0 ಯು P ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $A = P_0 B$. (d) ಯು (a) ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು, ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 6 ರ ಅಭ್ಯಾಸ (14)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

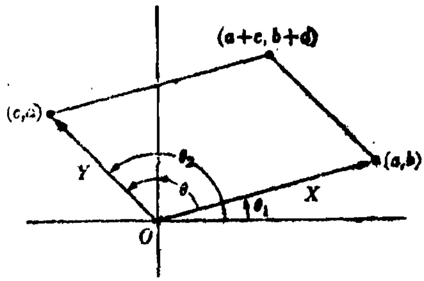
ಭಾಗ 6. ನಿರ್ಧಾರಕ

ಈ ಭಾಗವನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಮೀಸಲಾಗಿಸಿದೆ. ನಿರ್ಧಾರಕವು ನಿಮ್ನ-ಆಯಾಮಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಜನಕಾರಿ ಗಣನಾತ್ಮಕ ಉಪ

ಕರಣ ಮತ್ತು ಉಚ್ಚ-ಆಯಾಮಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶಕ್ತಿಶಾಲಿ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಉಪಕರಣ. ಈ ಕಾರಣಕ್ಕಾಗಿ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ದೊರಕಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಗಮನವನ್ನು ಕೇಂದ್ರೀಕರಿಸೋಣ. R^2 ನಲ್ಲಿನ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಮತ್ತು 2×2 ನಿರ್ಧಾರಕದೊಡನೆ ಅದರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕುರಿತ ಒಂದು ಚರ್ಚೆಯೊಡನೆ ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಲಾಗುವುದು. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ದೊರಕಿಸಲಾಗುವುದು. ಅನಂತರ ಈ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಲಾಗುವುದು.

ತನ್ನ ಆದ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು $(0,0)$ ಯಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಬಾಣಗಳ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಂತೆ R^2 ಸಮತಲವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು; ಅಂದರೆ, R^2ನಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು (a,b) ಯು, ಆದ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು $(0,0)$ ಆಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಅಂತಿಮಬಿಂದುವನ್ನು (a,b) ಆಗಿಯೂ ಹೊಂದಿರುವ ಬಾಣ **X** ಗೆ ಸಂವಾದಿಯಾಗಿದೆ. ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ **X** ಬದಲು X ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುವುದು ಮತ್ತು $(0,0)$ವನ್ನು ತನ್ನ ಆದ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿಯೂ, (a,b) ಯನ್ನು ತನ್ನ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವಾಗಿಯೂ ಹೊಂದಿರುವ ಬಾಣವು X ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲು $X=(a,b)$ ಎಂದೂ ಕೂಡ ಬರೆಯಲಾಗುವುದು.

$X=(a,b)$ ಮತ್ತು $Y=(c,d)$ ಗಳು R^2ನಲ್ಲಿರುವ ನಿರವಲಂಬಿತ ಸದಿಶಗಳಾಗಿರಲಿ; ಅಂದರೆ, $(0,0)$, (a,b) ಮತ್ತು (c,d) ಗಳು ಏಕರೇಖೀಯವಾಗಿಲ್ಲ. ಆಗ X ಮತ್ತು Y ಗಳು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ P ಯ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಾಗಿ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ, ಇದರ ಶೃಂಗಗಳು $(0, 0)$,



ಚಿತ್ರ-1

(a,b), (c,d) ಮತ್ತು $(a+c,b+d) = X+Y$ ಗಳಾಗಿವೆ. Pಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು $|A|$ ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. X ಮತ್ತು Y ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ θ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 1 ನೋಡಿ).

ಕೆಳಗಿನ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸೋಣ.

(1) ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ P ಯ **ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು** $\pm|A|$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $0\le\theta\le\pi$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಧನ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನೂ ಮತ್ತು $\pi<\theta<2\pi$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ($\{X,Y\}$ ಯು ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $\theta=0$, π ಅಥವಾ 2π ಸಂಭವಿಸಲಾರದು.)

ಈ ಅಂಕನವು, ಒಂದು ಸ್ಥಾನ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಅಪೇಕ್ಷಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳೊಡನೆ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವಾಗ ಬಹಳ ಸಹಾಯಕವಾಗಿರುವ ಚಿನ್ಹಾಪೂರ್ವಕ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಒಂದು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. P ಯ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲದ P ಯ ಮೇಲೆ ಮಾತ್ರವೇ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ನಾವು X, Y ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರುವ ಕ್ರಮದ ಮೇಲೆಯೂ ಕೂಡ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆಂದೂ ಗಮನಿಸಿರಿ.

(2) X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾನಾಂತರ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು Y ಮತ್ತು X ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಷೇಧವಾಗಿದೆ.

A ಯ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು (a,b) ಮತ್ತು (c,d) ಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲಾಗುವುದು. $|A|$ ಯ P ಯ ಪಾದ $\times$ ಎತ್ತರದಷ್ಟು ಮತ್ತು $A > 0$ ಆಗಿರುವಾಗ $\sin\theta > 0$, $|A|$ ಯು ಎಂದೂ, $A < 0$ ಆಗಿರುವಾಗ $\sin\theta < 0$ ಎಂದೂ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. θ_1 $(1, 0)$ ಮತ್ತು X ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು θ_2 $(1, 0)$ ಮತ್ತು Y ಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $\theta = \theta_2 - \theta_1$ ಮತ್ತು $(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\theta_1, \sin\theta_1)$; $(c,d) = \sqrt{c^2 + d^2}(\cos\theta_2, \sin\theta_2)$ (ಚಿತ್ರ 1 ನೋಡಿ).

$|X|$ ಇದು X ನ ಉದ್ದವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $|Y|$ ಯು Y ಯ ಉದ್ದವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $A = |X||Y|\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}\sin(\theta_2 - \theta_1) = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}(\sin\theta_2\cos\theta_1 - \cos\theta_2\sin\theta_1) = (\sqrt{a^2 + b^2}\cos\theta_1)(\sqrt{c^2 + d^2}\sin\theta_2) - (\sqrt{a^2 + b^2}\sin\theta_1)(\sqrt{c^2 + d^2}\cos\theta_2) = ad - bc$. ಇದರಿಂದಾಗಿ

(3) (a, b) ಮತ್ತು (c, d) ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $ad - bc$ ಆಗಿದೆ.

ಮತ್ತು

4) $c < \theta < \pi$ ಆಗಿರುವಾಗ $ad - bc$ ಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು $\pi < \theta < 2\pi$ ಆಗಿರುವಾಗ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತದೆ.

(a, b) ಮತ್ತು (c, d) ಗಳು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಅವು 0 ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲದ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದು. ಇದು, ಕೇವಲ $ad = bc$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $\{(a,b),(c,d)\}$ ಯು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, (3) ರೊಡನೆ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗಿದೆ (ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 2 ರ ಅಭ್ಯಾಸ 7ನ್ನು ನೋಡಿ).

ಈಗ T ಯು R^2 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ $det\,(T)$ ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಲ್ಪಡುವ T ಯ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗುವುದು,

(5) $det\,(T)$ ಯು (a,b) ಮತ್ತು (c,d) ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಮತ್ತು $T(a, b)$ ಮತ್ತು $T(c, d)$ ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಇವೆರಡರ **ನಿಯತ ಅನುಪಾತವಾಗಿದೆ.**

ಹೇಗೇ ಆಗಲಿ, ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವು $\{(a,b),(c,d)\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ಅಪೇಕ್ಷಿಸುತ್ತದೆ. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವು ಒಂದು ಭೌತಿಕ ಅಥವಾ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅಳತೆಗಳಿಲ್ಲದ ಒಂದು ಆಯಾಮವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ: ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ $det\,(T)$ ಯು, (a, b) ಮತ್ತು (c,d) ಗಳು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದ್ದಾಗ ಹೊರತು, ಅವುಗಳ ಆಯ್ಕೆಯ ಮೇಲಾಗಲಿ ಅಥವಾ ಅಂತರ ಮತ್ತು ಕೋನದ ಆಯ್ಕೆಯ ಮೇಲಾಗಲಿ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರಬೇಕು. ಇದನ್ನು ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬೈಜಿಕವಾಗಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ ಯು}$$

T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $T(a,b) = (A_{11}a + A_{12}b,\ A_{21}a + A_{22}b)$ ಮತ್ತು $T(c,d) = (A_{11}c + A_{12}d,\ A_{21}c + A_{22}d)$. ಹೀಗೆ (3) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $T(a,b)$ ಮತ್ತು $T(c,d)$ ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು, $(A_{11}a + A_{12}b)(A_{21}c + A_{22}d) - (A_{21}a + A_{22}b)(A_{11}c + A_{12}d) = (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})(ad - bc)$ ಆಗಿದೆ.

(a, b) ಮತ್ತು (c, d) ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $ad - bc$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

(6) $\det(T) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು 2×2 ಮಾತೃಕೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲು (6) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ A ಯ **ನಿರ್ಧಾರಕವು** $\det(A)$ ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇಂತಿದೆ :

(7) $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$.

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದೊಡನೆ A ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವಲ್ಲಿ $\det(T) = \det(A)$ ಎಂದು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. $\det(T)$ ಯನ್ನು n ಆಯಾಮಗಳಿಗೆ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ (7) ರ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗುವುದು ಮತ್ತು ಅನಂತರ ಈ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಲಾಗುವುದು. $\det(A)$ ಯು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. $\det(A)$ ಬಿಂಬಕವು ಕೆಳಗಿರುವ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ,

(8)

(a) A ಯ ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಒಂದು ಅದಲು ಬದಲಿನ ಮೂಲಕ A' ಯು A ಯಿಂದ ದೊರೆತರೆ ಆಗ $\det(A') = -\det(A)$

(b) A ಯ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ p ಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ A' ನ್ನು A ಯಿಂದ ದೊರಕಿಸಿದರೆ, ಆಗ $\det(A') = p \cdot \det(A)$.

(c) A ಯ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ A' ನ್ನು A ಯಿಂದ ದೊರಕಿಸಿದರೆ, ಆಗ $\det(A') = \det(A)$.

(d) $\det(I) = 1$.

(8) ರ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ (7) ರಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.) ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೂ ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಡಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಬಿಡಲಾಗುವುದು. (8) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಧರ್ಮಗಳು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ $det\,(A)$ ಯ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ತಿಳಿಸುವುದೇ (8) ರ ತ್ವವಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $d\,(A)$ ಯು (8) ರ ಗುಣಧರ್ಮಗಳೊಡನೆ 2×2 ತೃಕೆಗಳ ಇನ್ನೊಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ; ದರೆ, $d(A') = -d\,(A)$, ಇದು A' ಯು $(8a)$ ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇದ್ದರೆ ತ್ರ; $d\,(A') = Pd\,(A)$, ಇದು A'ಯು $(8b)$ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ; $A') = d\,(A)$, ಇದು A'ಯು $(8c)$ ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ; ಮತ್ತು $I) = 1$.

ಈಗ $g\,(A) = d(A) - det\,(A)$ ಆಗಿರಲಿ. ಉತ್ಪನ್ನ g ಯು ಗಿರುವ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ:

(a) A'ಯು $(8a)$ ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $g(A') = g(A)$.

(b) A'ಯು $(8b)$ ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $g\,(A') = pg(A)$.

(c) A'ಯು $(8c)$ ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $g(A') = g(A)$.

(d) $g(I) = 0$.

ಎಲ್ಲ 2×2 ಮಾತೃಕೆ A ಗಳಿಗೆ $g(A) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. Aಯು ಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (8) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಉಪ ಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, $(8b)$ ಯಲ್ಲಿರುವ $P \neq 0$ ಯೊಡನೆ, A ಯನ್ನು I ಗೆ ಸಂಕುಚಿಸ ಹುದು. $(9a, b, c)$–ಗಳಿಂದ; $g(A)$ ಯು $g(I)$ ನ ಒಂದು ಅಶೂನ್ಯಗುಣಕ ಾಗಿದೆ. $(9d)$ ಯಿಂದ $g(A) = 0$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುವುದು. A ಯು ಲೋಮ ಅಸಾಧ್ಯವಾಗಿರಲು ಆಗ A ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿವೆ. $(A_{11}, A_{12}) = a(A_{11}, A_{22})$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ಗಿರಲಿ. ಆಗ $(9c)$ ಯಿಂದ $g(A) = g(B)$; ಏಕೆಂದರೆ ಒಂದು A ಯ ಅಡ್ಡ

ಸಾಲು $-a$ ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ A ಯ ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ B ಯನ್ನು A ಯಿಂದ ಪಡೆದಿವೆ.

$$B=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0{\cdot}0 & 0{\cdot}0 \end{bmatrix}$$

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $(9b)$ ಯಿಂದ $g(B)=0$ ಎಂದು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಹೀಗೆ $g(A)=0$. ಎಲ್ಲ 2×2 ಮಾತೃಕೆ A ಗಳಿಗೆ $g(A)=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಹೀಗೆ ಎಲ್ಲ 2×2 ಮಾತೃಕೆ Aಗಳಿಗೆ $d(A)=det\ (A)$ ಆಗುವುದರಿಂದ (8) ರ ಗುಣಧರ್ಮಗಳೇ 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೇಲಿನ ನಿರ್ಧಾರವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸುವಂತೆ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

(10) (8) ನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ ಒಂದೇ ಒಂದು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ನೈಜ ಮೌಲ್ಯ ಹೊಂದಿದ ಉತ್ಪನ್ನವು (7) ರಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.

ಈ ಘಟ್ಟದಲ್ಲಿ $n\times n$ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು ಮತ್ತು ಅದು (8) ರ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು. ಆದರೆ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಒತ್ತಿ ಹೇಳುವುದು ಮುಖ್ಯವೇ ಹೊರತು ನಿರ್ಧಾರಕದ ಗಣನೆಯನ್ನು ಅಲ್ಲ. ಈ ಕಾರಣಕ್ಕಾಗಿ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲು (8) ರ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು.

$n\times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಒಂದು **ನಿರ್ಧಾರಕ ಉತ್ಪನ್ನ** A ಯು (8) ರ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ, $det\ (A)$ ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ನೈಜ ಮೌಲ್ಯ ಹೊಂದಿದ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ. (8) ರ ಗುಣಧರ್ಮಗಳೊಡನಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮಾತ್ರ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ, $det\ (A)$ ಯು, (8) ರ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ $n\times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ.

(11) A ಯ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಸೊನ್ನೆಗಳಿಂದಲೇ ಆಗಿದೆಯಾದರೆ; ಆಗ $det\ (A)=0$.

ಹೇಗೆಂದರೆ, A ಯ i ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಸೊನ್ನೆಗಳಿಂದ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. A'ಯು A ಯಿಂದ i ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು 0 ಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಸೃಜಿತ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $A'=A$ ಮತ್ತು $det\ (A')=0$, $det\ (A)=0$, 8(b) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. ಹೀಗೆ $det\ (A)=0$ ಆಗುವುದರಿಂದ

(11) ಸ್ಥಾಪಿತವಾಯಿತು. $det(A)$ ಯ ಇನ್ನೊಂದು ಗುಣಧರ್ಮವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ,

(12) A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಆಗ $det(A) = 0$.

A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $(8b)$ ಯಲ್ಲಿ $P \neq 0$ ಆಗುವಲ್ಲಿ (8) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು A ಯನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗಳ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆ B ಗೆ ಸಂಕುಚಿಸಬಹುದು. ಆಗ $det(A)$ ಯು $det(B)$ ಯ ಒಂದು ಅಶೂನ್ಯಗುಣಕ ಮತ್ತು $det(B) = 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ $det(A) = 0$. ಇದು (12) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ. (11) ಮತ್ತು (12) ರ ಸಾಧನೆಗಳು $(9a, b, c)$ ಯಂತೆಯೇ ಇರುವ $(8a, b, c)$ ಯನ್ನು $det(A)$ ಯು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯೊಂದನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡೆವು. ಇದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ

(13) $g(A)$ ಯು $(9a, b, c)$ ಯನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಒಂದು ನೈಜ ಮೌಲ್ಯ ಹೊಂದಿದ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಆಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ $g(A) = 0$.

ಈಗ (10) ನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಲು (13)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

(14) $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡುವ ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ ಉತ್ಪನ್ನವಿದೆ.

ಹೇಗೆಂದರೆ, $det(A)$ ಮತ್ತು $d(A)$ ಗಳೆರಡೂ (8) ನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $g(A) = det(A) - d(A)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $g(A)$ ಯು 9 ನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಆಗ (13), $g(A) = 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ A ಯನ್ನು I ಗೆ, $(8b)$ ಯಲ್ಲಿ $P \neq 0$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, (8) ರ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಸಂಕುಚಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ $g(A)$ ಯು $g(I)$ ನ ಒಂದು ಅಶೂನ್ಯ ಗುಣಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $g(A) = 0$. ಹೀಗೆ ಎಲ್ಲ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ A ಗಳಿಗೂ $g(A) = 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ ಇದು (14) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತದೆ.

(15) $det(A)$ ಯು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಕೇವಲ A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $det(A) \neq 0$ ಎಂಬುದನ್ನು (4)ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಿದೆ.

$det(A) \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿರಲೇಬೇಕೆಂದನ್ನು ಗುಣಧರ್ಮ (13) ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ನಾವು A ಯನ್ನು I ಗೆ, (8b) ಯಲ್ಲಿ $P \neq 0$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ (8) ರ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಕುಚಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ $det(A)$ ಯು $det(I)$ ನ ಒಂದು ಅಶೂನ್ಯಗುಣಕ ಮತ್ತು $det(I) = 1$. ಇದು (15) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ.

(8) ಮತ್ತು (14) ರಿಂದ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬಹುಭಾಗ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸೋಣ. $det(A)$ ಯು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

(16) $$det(AB) = det(A)\, det(B).$$

B ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಆಗ AB ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ. [ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 6 ರ (28) ನೋಡಿ.] ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ (11) ರಿಂದ $det(AB) = 0$ ಮತ್ತು $det(B) = 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ (16) ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆ. B ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (15) ರಿಂದ $det(B) \neq 0$. $d(A)$ ಯು, $d(A) = det(AB)/det(B)$ ಯಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡಲಿ. ಆಗ $d(A)$ ಯು (8) ನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ A ಯ i ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು p ಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ A' ದೊರೆಯಲಿ. ಆಗ $A'B$ ಯು AB ಯಿಂದ AB ಯ i ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು p ಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. [$C = AB$ ಇರಲು, $C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}A_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj}$ ಆಗುವುದರಿಂದ, $pC_{ij} = (pA_{i1})B_{1j} + (pA_{i2})B_{2j} + \cdots + (pA_{in})B_{nj}$.] ಹೀಗೆ $det(A'B) = p\, det(AB)$ ಆಗುವುದರಿಂದ $d(A') = pd(A)$, (8) ರ ಇತರ ಭಾಗಗಳೂ $d(A)$ ಗೆ ಊರ್ಜಿತವಾಗುವುದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ತೋರಿಸಬಹುದು. (14) ರಿಂದ $d(A) = det(A)$, ಅಂದರೆ, $det(AB)/det(B) = det(A)$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದು (16) ಆಗಿದೆ.

(8a, b, c) ಯು ನೀಟಸಾಲು ಪರಿಕರ್ಮಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಲ್ಪಡಬಹುದೆಂಬು

ದನ್ನು ತೋರಿಸಲು (8) ಮತ್ತು (14) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಇದರಿಂದ;

(17)

(a) A ಯ ಎರಡು ನೀಟಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ, A ಯಿಂದ A' ಅನ್ನು ದೊರಕಿಸಿದಲ್ಲಿ, ಆಗ $det\ (A') = -\ det\ (A)$.

(b) A ಯ ಒಂದು ನೀಟಸಾಲನ್ನು p ಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ, A'ಅನ್ನು Aಯಿಂದ ದೊರಕಿಸಿದಲ್ಲಿ, $det(A') = p\ det(A)$.

(c) A ಯ ಒಂದು ನೀಟಸಾಲನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದದ್ದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ನೀಟಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ, A ಯಿಂದ A' ಅನ್ನು ದೊರಕಿಸಿದರೆ, ಆಗ $det\ (A') = det\ (A)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(17) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. A ಯಿಂದ A'ಯು, j ಮತ್ತು k ನೀಟಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯಲಿ. $d\ (A) = -\ det\ (A')$ ಆಗಿರಲಿ. Y ಮತ್ತು S ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ B ಯು A ಯಿಂದ ದೊರೆಯಲಿ ಮತ್ತು j ಮತ್ತು k ನೀಟಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ B'ಯು Bಯಿಂದ ದೊರೆಯಲಿ. ಆಗ A'ನ r ಮತ್ತು s ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ B'ಯು A'ನಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ $det\ (B') = -\ det\ (A')$. ಆದ್ದರಿಂದ $d\ (B) = -\ det\ (B') = det\ (A') = -\ d\ (A)$. ಇದು $d\ (A)$ ಯು ($8a$) ಯನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. $d\ (A)$ ಯು ($8b$) ಮತ್ತು ($8c$) ಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆನ್ನುವ ಸಾಧನೆಯೂ ಅಷ್ಟೇ ನೇರವಾಗಿದೆ. I'ಯು I ನಿಂದ i ಮತ್ತು j ನೀಟಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯಲಿ. ಆಗ I' ನಿಂದ I ಯನ್ನು i ಮತ್ತು j **ಅಡ್ಡಸಾಲು**ಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ದೊರಕಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ $d\ (I) = -\ det\ (I') = det\ (I) = 1$. ಆದ್ದರಿಂದ $d\ (A)$ ಯು ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುವುದರಿಂದ $d\ (A) = det\ (A)$; ಅಂದರೆ $det\ (A) = -\ det\ (A')$. ಇದೇ ($17a$) ಆಗಿದೆ.

($17b$) ಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು $p \neq 0$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು $d\ (A)$ ಯನ್ನು $det\ (A')/p$, ಇಲ್ಲಿ A' ಯು ($7b$) ಯಲ್ಲಿರುವಂತಿದೆ, ಎಂದು ವಿವರಿಸೋಣ. ಆಗ $d\ (A)$ ಯು ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ ಉತ್ಪನ್ನ. ಅಂದರೆ, $d\ (A)$ (8) ನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದರಿಂದ, (14) ರಿಂದ, $d\ (A) = det\ (A)$ ಎಂದು ತೋರಿಸು

ವುದು ಸುಲಭ. ಹೀಗೆ $p\ det\ (A) = det(A')$. $p \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ನೀಟ ಸಾಲಿನ ಸ್ಥಾನ $(A') \leq (n-1)$ ಆಗುವುದರಿಂದ, ಸ್ಥಾನ $(A') \leq (n-1)$. ಹೀಗೆ A' ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ. (12) ರಿಂದ $det\ (A') = 0 = det\ (A) = p\ det\ (A)$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದು $(17b)$ ಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ. $(17c)$ ಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು A'ಯು $(17c)$ ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇರಲಿ ಮತ್ತು $d\,(A) = det\ (A')$ ಆಗಿರಲಿ. ಪುತ್ತೆ $d\,(A)$ ಯು ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $d\,(A) = det\ (A)$. ಇದು $(17c)$ ಆಗಿದೆ.

(17) ರ ಒಂದು ಪರಿಣಾಮವು

(18) $det\ (A') = det\ (A)$ ಎಂದಿದೆ ಇಲ್ಲಿ A' ಯು A ಯ ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟನ ಆಗಿದೆ.

(18)ನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು $d\,(A) = det\ (A')$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ A ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮವು A'ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ನೀಟಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ, (17) ರಿಂದ $d\,(A)$ ಯು ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ $d\,(A) = det\ (A)$, ಇದೇ (18) ಆಗಿದೆ.

(16), (17) ಮತ್ತು (18) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಸಾಧನೆಯ ವಿಧಾನವು ಹೀಗಿದೆ: ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ $d\,(A)$ ಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗುವುದು ಮತ್ತು $d\,(A)$ ಯು ಒಂದು ವಿಧೇಯಕ ಉತ್ಪನ್ನ, ಅಂದರೆ, (8)ನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. [(16) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು $d\,(A) = det\ (AB)/det\,(B)$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ; (18) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು $d\,(A) = det\ (A')$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ; ಇತ್ಯಾದಿ] ಈ ಸಾಧನೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಲ್ಪಡಬಹುದಾದ ಹೆಚ್ಚಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬಹುಭಾಗ ಶಿಷ್ಟ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ದೊರಕಿಸಬಹುದು.

ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶವು ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ.

(19) A ಯು ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. $1 \leq s \leq n$ ಆಗಿರುವ s ಒಂದು ಸ್ಥಿರಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ. $j = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ $A_{sj} = b_{sj} + c_{sj}$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. B ಮತ್ತು C ಗಳು $j = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ $B_{ij} = C_{ij} = A_{ij}$ ಯಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿರಲಿ; $i \neq s$ ಆಗಲು $B_{sj} = b_{sj}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; ಮತ್ತು $C_{sj} = c_{sj}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, ಆಗ $det\ (A) = det\ (B) + det\ (c)$.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು $(8c)$ಯೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಲು A ಯ ಇತರ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿದ್ದಾಗ $det\ (A)$ ಯು s ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. (19) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು, $c_{s1}, c_{s2}, \ldots, c_{sn}$ ಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರಲು ಮತ್ತು s ಅಡ್ಡಸಾಲು ಹೊರತಾಗಿ B, A ಮತ್ತು C ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $d(B) = det\ (A) - det\ (C)$ ಆಗಿರಲಿ ; $c_{sj} = c_s, j = 1, 2, \ldots, n$; $A_{sj} = B_j + C_{sj}, j = 1, 2, \ldots, n.$ $d(B)$ ಯು ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದ ಸಾಧನೆಯು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ $d\ (B) = det\ (B)$, ಇದರಿಂದ (19) ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ $n \times n$ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ. ಇದನ್ನು ಅನುಗಮನಪೂರ್ವಕ ಮಾಡಿದಲ್ಲಿ; ಅಂದರೆ, $(n-1) \times (n-1)$ ನಿರ್ಧಾರಕದಿಂದ $n \times n$ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ದೊರಕಿಸುವುದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು. ಹೀಗೆ 7×7 ನಿರ್ಧಾರಕವು 6×6 ನಿರ್ಧಾರಕದಿಂದ 6×6 ನಿರ್ಧಾರಕವು 5×5 ರಿಂದ ರಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. 5×5 ನ್ನು 4×4 ನ್ನು 3×3 ರಿಂದ ಮತ್ತು 3×3 ನ್ನು 2×2 ರಿಂದ ರಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದು (7) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಇದು ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಮಾಡಲು ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಉಳಿದುವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ. 3×3 ಪ್ರಸಂಗದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಲಾಗುವುದು. A ಯು ಒಂದು 3×3 ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಈಗ $det\ (A)$ ಯನ್ನು ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$(20) \qquad det\ (A) = A_{11}\ det\begin{bmatrix} A_{22} & A_{22} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - A_{21}\ det\begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} + A_{31}\ det\begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವು (8) ನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದು ಸುಲಭ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, (8) ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ. ಈಗ

$$A' = \begin{bmatrix} A_{11} - aA_{21} & A_{12} - aA_{22} & A_{13} - aA_{23} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ

$$\det(A') = (A_{11} - aA_{21}) \det \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$- A_{21} \det \begin{bmatrix} A_{12} - aA_{22} & A_{13} - aA_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$+ A_{31} \det \begin{bmatrix} A_{12} - aA_{22} & A_{13} - aA_{23} \\ A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

(19) ಮತ್ತು (8b) ಗಳಿಂದ

$$\det \begin{bmatrix} A_{12} - aA_{22} & A_{13} - aA_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -aA_{22} & -aA_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - a \det \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

(8c) ಯಿಂದ

$$\det \begin{bmatrix} A_{12} - aA_{22} & A_{13} - aA_{23} \\ A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}.$$

ಹೀಗೆ

$$\det(A') = (A_{11} - aA_{12}) \det \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - A_{21} \det \begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$+ aA_{21} \det \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} + A_{31} \det \begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} = \det(A).$$

ಇತರ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳಿಗೂ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಗಣನೆಯು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ (8c) ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆ.

(14) ರಿಂದ 3×3 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೇಲಿನ ನಿರ್ಧಾರಕ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನೇ (20)

ವ್ಯಾಪ್ತಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಗಣನೆಯು $d(A)$ ಮತ್ತು $d_1(A)$ ಗಳು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡಲು

$$(21)\qquad d(A) = -A_{12}\,det\begin{bmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} + A_{22}\,det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} - A_{32}\,det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{bmatrix}$$

ಮತ್ತು

$$(22)\qquad d_1(A) = A_{13}\,det\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} - A_{23}\,det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} + A_{33}\,det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆಗ $d(A)$ ಮತ್ತು $d_1(A)$ ಗಳೆರಡೂ (8) ನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ. ಏಕೈಕತೆಯಿಂದ $d(A) = d_1(A) = det(A)$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ರಚನೆಯು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. A ಯು ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ, $(n-1)\times(n-1)$ ನಿರ್ಧಾರಕವು ಜ್ಞಾತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $A(i, j)$ ಯು, A ಯ j ನೇ ನೀಟಸಾಲನ್ನೂ ಮತ್ತು i ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವುದರಿಂದ ದೊರಕಿಸಿದ $(n-1)\times(n-1)$ ಮಾತೃಕೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸಲಿ. $A(i, j)$ ಇದನ್ನು A ಯ ಅಲ್ಪ $i\,j$ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. j ಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನ $det(A)$ ಯು

$$(23)\qquad det(A) = (-1)^{j+1}A_{1j}A(1, j) + (-1)^{j+2}A_{2j}A(2, j) + \cdots + (-1)^{j+n}A_{nj}A(n, j)$$ ಯು

$n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೇಲಿನ ನಿರ್ಧಾರಕವಾಗಿದೆ. (23) ರಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನವು (8)ನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದರ ಸಾಧನೆ (20), ಇದು (8)ನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಸಾಧನೆಯಂತೆಯೇ ಇದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ. (23) ರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ನಿಯಮವನ್ನು **j ನೇ ನಿಟಿಸಾಲುಗುಂಟ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಲಾಪ್ಲೇಸ್ ವಿಸ್ತರಣೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. j ಯ ಮೇಲೆ (23)

ಅವಲಂಬಿಸುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ; ಅಂದರೆ, ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಿರ j ಯು, $1 \leq j \leq n$, ಮೊದಲಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಇದು (14)ರ ಒಂದು ಪರಿಣಾಮವಾಗಿದೆ.

ನಿಯಮ (23), ಗಣನೆಗೆ ಅಷ್ಟು ತೃಪ್ತಿಕರವಾಗಿಲ್ಲ. ಗಣನೆಯಲ್ಲಿ (8), ಎಷ್ಟೋ ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯೋಗಿಯಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ 4 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು.

ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳಿಂದ ಒಂದು ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಲು (18) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. i ಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$(24) \quad det\,(A) = (-1)^{i+1}A_{i1}A(i,1) + (-1)^{i+2}A_{i2}A(i,2) + \cdots + (-1)^{i+n}A_{in}A(i,n).$$

(23) ರಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟಗೊಳಿಸಿ (18) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ ಇದು ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

(25) (14) ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದ್ದೇವೆ. $g(A)$ ಯು (8) ನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಪೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಎಲ್ಲ Aಗಳಿಗೆ $g(A) = 0$.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ವಿಲೋಮಕ್ಕೆ ಒಂದು ಉಪಯುಕ್ತ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. Aಯು 3×3 ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $g(A) = -A_{11}A(1,2) + A_{21}A(2,2) - A_{31}A(3,2)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ gಯು (9) ನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದರಿಂದ ಎಲ್ಲ Aಗಳಿಗೆ $g(A) = 0$. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಫಲಿತಾಂಶವು ಇಂತಿದೆ,

(26) A ಯು $n \times n$ ಮತ್ತು $k \neq j$ (ಅಥವಾ $i \neq r$) ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $g(A) = (-1)^{k+1}A_{1j}A(1,k) + (-1)^{k+2}A_{2j}A(2,k) + (-1)^{r+2}A_{1i}A(r,2(+ \cdots + (-1)^{r+n}A(r,n)$ ನಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ $g(A)$ ಉತ್ಪನ್ನವು

(9) ರ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದರಿಂದ ಎಲ್ಲ Aಗಳಿಗೆ $g(A) = 0$ (26)ರ ಸಾಧನೆಯು ಇಲ್ಲಿಯೂ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ ಬಿಡ

ಲಾಗಿದೆ. (23), (24) ಮತ್ತು (26) ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಂಯೋಜಿಸಬಹುದು,

(27) $s \neq t$ ಆಗಿರುವಾಗ $\delta_{st} = 0$ ಮತ್ತು $\delta_{ss} = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(-1)^{k+n}A_{1j}A(1, k) + (-1)^{k+2}A_{2j}A(2, k) + \cdots + (-1)^{k+n}A_{nj}A(n, k) = \delta_{jk}\, det\ (A)$ ಮತ್ತು $(-1)^{r+1}A_{i1}A(r, 1) + (-1)^{r+2}A_{i2}A(r, 2) + \cdots + (-1)^{r+n}A_{in} \times A(r, n) = \delta_{ir}\, det\ (A)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

B ಯು $1 \leq s \leq n$, $1 \leq t \leq n$ ಗೆ $B_{st} = (-1)^{s+t}A(t, s)$ ನಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. B ಯನ್ನು A ಯ **ವರ್ಗೀಕೃತ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. (B ಯು ಭಾಗ 5 ರ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಗೆ ಯಾವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ.) (27)ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪುನಃ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು,

(28) $AB = BA = (det\ (A))\ I.$

ಹೀಗೆ ಕೇವಲ $det\ (A) \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ [ನೋಡಿ (15)], ಮತ್ತು

(29) $det\ (A) \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $A^{-1} = (1/det\ (A))\ B$, ಇಲ್ಲಿ B ಯು A ಯ ವರ್ಗೀಕೃತ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಯಾಗಿದೆ.

(16) ಮತ್ತು ($8d$) ನಿಯಮಗಳಿಂದ, $1 = det\ (I) = det\ (AA^{-1}) = det\ (A)\ det\ (A^{-1})$. $B = det\ (A)\ )A^{-1}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

(30) $det\ (A^{-1}) = 1/det\ (A),$

(31) $det\ (B) = det(A)^{n-1}$, ಇಲ್ಲಿ B ಯು A ಯ ವರ್ಗೀಕೃತ ಬಂಧಿಯಾಗಿದೆ.

ಹೇಳಿಕೆ (31) ಕೆಳಗಿರುವುದರ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಪ್ರಸಂಗವಾಗಿದೆ,

(32) A ಯು $n \times n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $det\ (aA) = a^n det(A).$

(32) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ($8b$) ಯ n ಅನ್ವಯಗಳಿಂದ (ಪ್ರತಿ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೂ ಒದೊಂದು) ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ $dim \ V = n$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು T ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $det\,(T)$ ಯನ್ನು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯ ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗುವುದು. ಇದು ಆಧಾರದ ಆಯ್ಕೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿಲ್ಲ ಹೇಗೆಂದರೆ A ಯು ಒಂದು ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು B ಯು ಮತ್ತೊಂದು ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $B = P_0 A P_0^{-1}$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ P_0 ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. [ಅಧ್ಯಾಯ 1, 6 ರ (5b) ನೋಡಿ.] $det\,(B) = det(P_0 A P_0^{-1}) = det\,(P_0) det\,(A)\, det(P_0^{-1}) = det(P_0) \times det\,(P_0^{-1})\, det\,(A) = det\,(A)$. ಇಲ್ಲಿಯ ಅಂತಿಮ ಸಮತೆಯು (29) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡಿದೆ.

(4) ರ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪವು ಮುಂದಿನಂತಿದೆ. T ಯು R^n ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು R^nಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದ್ದರೆ, C ಯು ತನ್ನ iನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು X^i ಆಗಿ ಹೊಂದಿರುವ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು D ಯು TX^i ಅನ್ನು $i = 1, 2, \ldots, n$, ತನ್ನ i ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ A ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $CA^t = D$. [ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 6 ರ (20) ನೋಡಿ.]

$$det\,(T) = \frac{det\,\,(D)}{det\,(C)}, \tag{33}$$

ಏಕೆಂದರೆ,

$$det\,\,(T) = det\,\,(A) = det\,\,(A^t)$$

$$= \frac{det\,(C)\; det(A^t)}{det\,(C)} = \frac{det\,(C A^t)}{det\,(C)} = \frac{det\,(D)}{det\,(C)}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ $det\,(C)$ ಯನ್ನು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ನಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ n – ಆಯಾಮದ ಸಮಾಂತರೀಕೃತದ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ n – ಆಯಾಮದ ಗಾತ್ರ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದಲ್ಲಿ, ಆಗ $det\,(T)$ ಯು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ನಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ n – ಆಯಾಮದ ಸಮಾಂತರೀಕೃತದ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ n– ಆಯಾಮದ ಗಾತ್ರಕ್ಕೆ $\{TX^1, TX^2, \ldots, TX^n\}$ ನಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ

n – ಆಯಾಮದ ಸಮಾಂತರೀಕೃತದ ಸ್ಥಾನ ವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ n – ಆಯಾಮದ ಗಾತ್ರದ ಅನುಪಾತವಾಗಿದೆ. ಇದು $det\,(T)$ಯು ಆಧಾರ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ನ ಆಯ್ಕೆಯಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಮುಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ $n = 3$ ಆಗಿದ್ದಾಗ, C ಯ ನಿರ್ಧಾರಕವು Cಯ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾಂತರೀಕೃತದ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಕೊಡುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು. ಇದು ಮೇಲೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ 'ಗಾತ್ರ' ಪದದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. (a) (7) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 2×2 ನಿರ್ಧಾರಕಕ್ಕೆ (8) ರ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ಸಫಲವಾಗುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) $$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

ಆಗ $det\,(A)$ ಯು (a,b) ಮತ್ತು (c,d) ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಸ್ಥಾನ ವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಾಗಿದೆ. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಈ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, (8) ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ವಿವರಿಸಿರಿ. [ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(8d)$ ಯು $(1, 0)$ ಮತ್ತು $(0, 1)$ ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು 1 ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ.]

(c) (11), (12) ಮತ್ತು (15) ನ್ನು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ, R^2 ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿಗೆ, (4) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ. ನಿರೂಪಿಸಿ.

(d) S ಮತ್ತು T ಗಳು R^2 ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಾಗಿರಲಿ; $det\,(S)$ ಮತ್ತು $det\,(T)$ ಗಳು (4) ರಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಇರಲಿ. S ಮತ್ತು T ಗಳಿಗೆ (16) ನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.

(e) 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ (19) ನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.

2. (7) ನ್ನು ಅಥವಾ (23) ಅನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಈ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [**ಗಮನಿಸಿ** : (d), (e) ಮತ್ತು (f) ಅಂಶಗಳಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತರಣೆಗೆ ನೀಟಸಾಲುಗಳನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಆರಿಸುವುದು ಸರಳತರ ಗಣನೆಗೆ ದಾರಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ.].

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

3. A ಯು ಒಂದು ಊರ್ಧ್ವ ತ್ರಿಕೋನೀಯ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $det\,(A) = A_{11}A_{22}\cdots A_{nn}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : (23) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ].

4. $(8a)$ ಮತ್ತು $(8c)$ ಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೀತಿಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಮೇಲು ತ್ರಿಕೋನೀಯ ರೂಪಕ್ಕೆ ಸಂಕುಚಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಅನಂತರ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಲು ಅಭ್ಯಾಸ 3 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ (2) ರಲ್ಲಿ (c) ಅಂಶಗಳಿಂದ (f) ಅಂಶಗಳವರೆಗೂ, ಇರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಿ. [$(8a)$ ಯ ಉಪಯೋಗವು ಚಿನ್ಹೆಗಳ ಒಂದು ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಕೊಡುವುದೆಂದು ನೆನಪಿಡಿರಿ.]

5. ಅಭ್ಯಾಸ 3ನ್ನು ಅನೇಕ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ. A ಯು $n \times n$ ಆಗಿರಲಿ,

B ಯು $k \times k$ ಆಗಿರಲಿ, C ಯು $n \times k$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು 0 ಯು $k \times n$ ಶೂನ್ಯಮಾತೃಕೆ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು

$$D = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix},$$ ಆಗಿರಲಿ,

ಅಂದರೆ,

$$D = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots A_{1n} & C_{11} & C_{12} \cdots C_{1k} \\ A_{21} & A_{22} \cdots A_{2n} & C_{21} & C_{22} \cdots C_{2k} \\ \vdots & & \vdots & \\ A_{n1} & A_{n2} \cdots A_{nn} & C_{n1} & C_{n2} \cdots C_{nk} \\ 0 & 0 \quad \ldots \quad 0 & B_{11} & B_{12} \cdots B_{1k} \\ 0 & 0 \quad \ldots \quad 0 & B_{21} & B_{22} \cdots B_{2k} \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 \quad \ldots \quad 0 & B_{k1} & B_{k2} \cdots B_{kk} \end{bmatrix}$$

$det\,(D) = det(A)\,det\,(B)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ:** A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಆಗ D ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು (12) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. Aಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, A ಮತ್ತು C ಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರಲು ಬಿಡಿ ಮತ್ತು $d\,(B) = det\,(D)/det\,(A)$ ಎಂದು ವಿವರಿಸಿ. $d\,(B)$ ಯು (8) ನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಅನಂತರ (14) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

6. ಕೆಳಗಿರುವುದರ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು. ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಲು ಅಭ್ಯಾಸ 5ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ,

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

7. (15) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ. ಮಾತೃಕೆಯು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ವ್ಯಸ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು (28)ನ ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

8. (a) 3×3 ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿರುವ (19) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.

(b) ನೇರವಾಗಿ ಗಣನೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ, (7)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, (20), (21) ಮತ್ತು (22) ಒಂದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(c) 3×3 ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ (26) ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಾಳೆ ನೋಡಿರಿ.

9. (a) (19) *ff* ನಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ $d(B)$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ (19) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.

(b) (23), (8)ನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(c) $g(A)$ ಯು (9)ರ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದರಿಂದ (26) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.

10. $\det(A) \neq 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ A ಯು ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿರಲಿ. ಮತ್ತು

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ ಆಗಿರಲಿ.}$$

C_j ಯು A ಯ jನೇ ನೀಟಸಾಲನ್ನು Y ಯಿಂದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸುವುದರಿಂದ A ಯಿಂದ ದೊರಕಿಸಲಾದ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. $AX = Y$ ಸಮೀಕರಣವು $x_j = det(C_j/det(A), j = 1, 2, \ldots, n$ ನಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರ X ಅನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಇದನ್ನು **ಕ್ರೇಮರನ ನಿಯಮ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಕ್ರೇಮರ್‌ನ ನಿಯಮವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು (29) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.

$$x_j = \left(\frac{1}{det(A)}\right)$$

$$\times\left((-7)^{j+1}A(1,j)y_1 + (-1)^{j+2}A(2,j)y_2 + \cdots + (-1)^{j+n}A(n,j)y_n\right)$$

ಮತ್ತು j ನೇ ನೀಟಸಾಲುಗುಂಟ ಲಾಪ್ಲೇಸ್ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ $det(C_j) = (-1)^{j+1}A(1,j)y_1 + (-1)^{j+2}A(2,j)y_2 + \cdots + (-1)^{j+n}A(n,j)y_n$.]

11. ಕ್ರೇಮರನ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ (ಅಭ್ಯಾಸ 10 ನೋಡಿ).

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪ್ರತಿ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(a) $\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ 3x - 2y + z &= 0 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 3x - y - z &= 1 \\ x + y &= 1 \\ y - z &+ 1 \end{aligned}$

12. A ಯು ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. Aಯ ಒಂದು r–ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳುಳ್ಳ ಅಪ್ರಧಾನವು A ಯಿಂದ n-r ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳನ್ನು

ಮತ್ತು $n-r$ ನೀಟಸಾಲುಗಳನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವುದರಿಂದ ದೊರೆತ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. A ಯ ಎಲ್ಲ k-ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳುಳ್ಳ ಅಪ್ರಧಾನಗಳೂ $z>r$ ಗೆ ಅದೃಶ್ಯವಾಗುವುದಾದರೆ ಮತ್ತು ಅದೃಶ್ಯವಾಗದ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದಾದರೂ A ಯ r-ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅಪ್ರಧಾನವು ಇದ್ದರೆ A ಯ **ನಿರ್ಧಾರಕ ಸ್ಥಾನವನ್ನು** r ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. A ಯು 3×3 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಸ್ಥಾನ A ಮತ್ತು A ಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಸ್ಥಾನ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. [A ಯು $n \times n$ ಆಗಿರುವಾಗಲೂ ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆ.]

13. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಒಂದು ಪರ್ಯಾಯ ರೂಪವನ್ನು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ದೊರಕಿಸಬಹುದು. n ಸ್ತರದ ಒಂದು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯು n-tuple $(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n)$ ರೂಪದ್ದಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $i \neq j$ ಇರಲು $1 \leq i \leq n$ಕ್ಕೆ $1 \leq \sigma i \leq n$ ಇರುವಂತೆ ಪ್ರತಿ σ_i ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ. $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. σದ ಪಾರ್ಶ್ವಜೋಡಿಗಳ ಅದಲು ಬದಲುಗಳ ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯಿಂದ n-tuple $(1, 2, \ldots, n)$ ಅನ್ನು ದೊರಕಿಸಬಹುದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರಬೇಕು. ಒಂದು ದತ್ತ σಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಅದಲು ಬದಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ವಿಷಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವಿಷಮವಾಗಿದ್ದರೆ -1 ಎಂದೂ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ $+1$ ಎಂದೂ σದ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

(a) $(1,2,\ldots,n)$ ಅನ್ನು ದೊರಕಿಸಲು ಅಗತ್ಯವಾದ σದ ಪಾರ್ಶ್ವಜೋಡಿಗಳ ಅದಲು ಬದಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮವಾಗಿದೆ ಅಥವಾ ವಿಷಮವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ:** $E\sigma$ವು ತನ್ನ iನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು I_n σದ ಅಡ್ಡಸಾಲಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. σದ ಚಿಹ್ನೆಯು $det\,(E\sigma)$ಗೆ ಸಮವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

(b) $det\,(A) = \Sigma\sigma(sgn_\sigma) A_{\sigma_1 1} A_{\sigma_2 2} \ldots A_{\sigma_n n}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಇದರ ಅರ್ಥ n ಸ್ತರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ರಮಯೋಜನೆ σಕ್ಕೆ $A_{\sigma_1 1} A_{\sigma_2 2} \ldots A_{\sigma_n n}$ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು

ರೂಪಿಸಿ, $sgn\ \sigma$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ($= \sigma$)ದ ಚಿನ್ಹೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ σಗೂ ಒಂದು ಪದ ಕೂಡಿಸುವುದು. ಇದನ್ನು ತೋರಿಸಲು, ಬಲ ಭಾಗವು ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆ (8) ನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

14. V ಯು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಒಂದು ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. $TA = AB$ ಇದರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಡುವ V ಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ T ಇರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ B ಯು ಸ್ಥಿರ 2×2 ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. $det\ (T) = (det\ (B)\ )^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** :

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 & B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$ ಇದು T ಯ

ಮಾತೃಕೆಯಾಗುವಂತೆ V ಯ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.]

15. A ಯು 4×4 ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ.

(a) ಅಭ್ಯಾಸ 4ನ್ನಾಗಲೀ ಅಥವಾ (23)ನ್ನಾಗಲೀ ಉಪಯೋಗಿಸಿ $det\ (A)$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬೇಕಾದ ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ 72 ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. (ಗುಣಲಬ್ಧ abcd ಯು ಮೂರು ಗುಣಾಕಾರಗಳಿಂದ ಆಗಿದೆ.)

(b) ಕ್ರೇಮರನ ನಿಯಮನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ (ನೋಡಿ ಅಭ್ಯಾಸ 10), $AX = Y$ ಬಿಡಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಹಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯು 364 ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(c) ಅಧ್ಯಾಯ 1 ರಲ್ಲಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಸಂಕುಚನೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ $AX = Y$ ಬಿಡಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಹಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಕ್ರೇಮರನ ನಿಯಮವು ಸಮರ್ಥ ವಿಧಾನವೇ ?

16. A ಯು $n \times n$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು t ಯ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. $det\ (t\,I - A)$ ಯು ಪ್ರಧಾನ ಸಹಗುಣಕ 1ರೊಡನೆ n ಸ್ತರದ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : ಅಭ್ಯಾಸ 14ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಥವಾ ಅನುಗಮನ ಮತ್ತು (23) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.

ಭಾಗ 7. ಮೂರು ಆಯಾಮಗಳಲ್ಲಿ ಓರೆಗುಣಲಬ್ಧ

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ R^3ನ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲಾಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿನ ಪ್ರಮುಖ ಉಪಕರಣಗಳು ನಿರ್ಧಾರಕ ಮತ್ತು ಓರೆಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಇವು ಆಪ್ತಸಂಬಂಧಿ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ ಆಗಿದೆ. R^3 ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ಆದ್ಯಬಿಂದುಗಳ $(0, 0, 0)$ ರಲ್ಲಿರುವ ಬಾಣಗಳ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ, R^3ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು (x_1, x_2, x_3) ವು $(0, 0, 0)$ ವನ್ನು ಆದ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿ ಮತ್ತು (x_1, x_2, x_3) ಯನ್ನು ಅಂತಿಮಬಿಂದುವಾಗಿಯೂ ಹೊಂದಿರುವ ಬಾಣ **X** ಗೆ ಸಹಗಾಮಿಯಾಗಿದೆ. ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ **X** ಬದಲು X ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುವುದು ಮತ್ತು $(0, 0, 0)$ವನ್ನು ತನ್ನ ಆದ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು (x_1, x_2, x_3) ಅನ್ನು ತನ್ನ ಅಂತಿಮಬಿಂದುವಾಗಿಯೂ ಹೊಂದಿರುವ ಬಾಣವು X ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲು $X = (x_1, x_2, x_3)$ ಎಂದೂ ಕೂಡ ಬರೆಯಲಾಗುವುದು, R^3ಯೂ ಅದೇ ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಗ್ರಹಿಸಿ ಇದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು (X, Y) ಅಂಕನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸದಿಶ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಎರಡು ಸದಿಶಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನವನ್ನು ಈ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

R^3ಗೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಒಂದು ಸ್ಥಾನ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತೇವೆ. $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$, ಮತ್ತು $Z = (z_1, z_2, z_3)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಕ್ರಮಪಡಿಸಿದ ತ್ರಿವಳಿ $\{X, Y, Z\}$ ಯು ಕೆಳಗಿನಂತಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಅದು ಒಂದು **ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿದೆ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ,

$$det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} > 0$$

ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನಂತಿದ್ದರೆ ಅದು ಒಂದು **ಋಣಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$$det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} < 0$$

(1) $\{X, Y, Z\}$ ಯು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $\{Y, Z, X\}$ ಮತ್ತು $\{Z, X, Y\}$ ಗಳು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು $\{X, Z, Y\}$, $\{Z, Y, X\}$ ಮತ್ತು $\{Y, X, Z\}$ ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಗಳಾಗಿವೆ.

(2) $\{X, Y, Z\}$ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $\{X + aY, Y, Z\}$, $\{X + aZ, Y, Z\}$, $\{X, Y + aX, Z\}$, $\{X, Y + aZ, Z\}$, $\{X, Y, Z + aX\}$ ಮತ್ತು $\{X, Y, Z + aY\}$ ಗಳೆಲ್ಲವೂ, a ಯು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಗಳಾಗಿವೆ.

(3) $a > 0$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\{X, Y, Z\}$ ಯು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $\{aX, Y, Z\}$, $\{X, aY, Z\}$ ಮತ್ತು $\{X, Y, aZ\}$ ಗಳೆಲ್ಲವೂ ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಗಳಾಗಿವೆ.

(4) $a < 0$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\{X, Y, Z\}$ ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $\{aX, Y, Z\}$, $\{X, aY, Z\}$ ಮತ್ತು $\{X, Y, aZ\}$ ಗಳೆಲ್ಲವೂ ಋಣಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಗಳಾಗಿವೆ.

(5) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ತ್ರಿವಳಿಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿದೆ.

ಇವು ಭಾಗ 6 ರ (8) ರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಾಗಿವೆ. ಈಗ $X = (x_1, x_2, x_3)$ ಮತ್ತು $Y = (y_1, y_2, y_3)$ ಗಳು ಎರಡು ನಿರವಲಂಬಿತ ಸದಿಶಗಳಾಗಿರಲಿ. $Z = (z_1, z_2, z_3)$ ಯು ಮುಂದಿರುವ ನಿರ್ಬಂಧಗಳಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡಲಿ.

(a) $|Z| = |X|\,|Y| \sin\theta$, ಇಲ್ಲಿ X ಮತ್ತು Y ನಡುವಣ ಕೋನ θ.

(6) (b) $(Z, X) = (Z, Y) = 0.$

(c) $\{X, Y, Z\}$ ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿದೆ.

ಈ ಮೂರು ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸದಿಶವು ಖಚಿತವಾಗಿ ಒಂದೇ ಇದೆ. ($6a$) ನಿರ್ಬಂಧವು ನಮಗೆ Z ನ ಉದ್ದವನ್ನು, ($6b$) ನಿರ್ಬಂಧವು Z ಗೆ ಕೇವಲ ಎರಡೇ ಆಯ್ಕೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ($6c$) ನಿರ್ಬಂಧವು ಇವುಗಳಲ್ಲೊಂದನ್ನು ವರ್ಜಿಸುತ್ತದೆ. Z ಅನ್ನು X ಮತ್ತು Y ಗಳ **ಓರೆಗುಣಲಬ್ಧ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $Z = X \times Y$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರ 1 ನೋಡಿ).

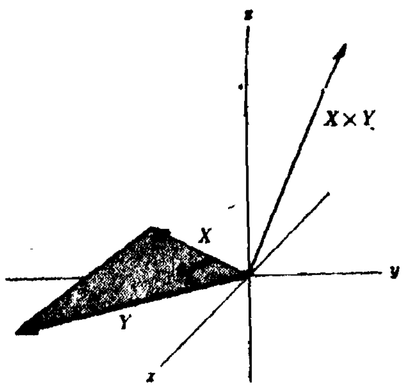
X ಮತ್ತು Y ಗಳು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $X \times Y$ ಅನ್ನು 0 ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗುವುದು. $\{X, Y\}$ ಯು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದ್ದರೆ $\theta = 0$ ಅಥವಾ π ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ($6a$) ಯೊಂದಿಗೆ ಸುಸಂಬದ್ಧವಾಗಿದೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸಫಲವಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ, $\theta = 0$ ಅಥವಾ π ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ X ಮತ್ತು Y ಗಳು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿವೆ. ಹೀಗೆ, ($6a$) ಯಿಂದ,

(7) $X \times Y = 0$ ಕೇವಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ,

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$= 1 - \left(\frac{(X, X)}{|X|\,|Y|}\right)^2$$

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ



ಚಿತ್ರ-1

($6a$) ನಿರ್ಬಂಧವನ್ನು ಹೀಗೆ ಪುನಃ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು,

(8) $$|X \times Y|^2 = |X|^2\,|Y|^2 - (X, Y)^2$$

ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳಿವೆ.

(9) $X \times Y = -Y \times X$

(10) $a(X \times Y) = (aX) \times Y = X + (aY)$ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ a ಗೆ.

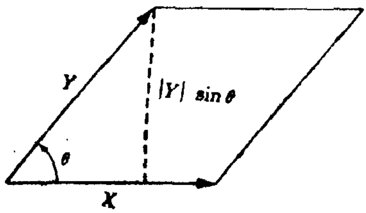
(11) $(X + aY) + Y = X + (Y + aX) = X \times Y$ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ a ಗೆ.

(6c) ಮತ್ತು (1) ರ ಒಂದು ನೇರ ಪರಿಣಾಮವು ಗುಣಧರ್ಮ (9) ಆಗಿದೆ. $a(X \times Y) = (aX) \times Y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. $Z^1 = a(X \times Y)$ ಮತ್ತು $Z^2 = (aX) \times Y$ ಆಗಿರಲಿ. Z^1 ಕೂಡ Z^2 ನಿರ್ಬಂಧಗಳನ್ನೇ ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು. $a = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $Z^1 = Z^2 = 0$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. $a \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $|Z^2|^2 = |aX|^2|Y|^2 - (aX, Y)^2 = a^2(|X|^2|Y|^2 - (X, Y)^2) = |Z^1|^2$. ಹೀಗೆ $|Z^1| = |Z^2|$. X ಮತ್ತು Y ಎರಡಕ್ಕೂ Z^1 ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, Z^1 ಯು aX ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೂ ಕೂಡ ಲಂಬವಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ಕೇವಲ $\{aX, Y\}$ ಯು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $\{X, Y\}$ ಯು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಆದ್ದರಿಂದ $\{X, Y\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆಗ $\{X, Y, X \times Y\}$ ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿದೆ. $a > 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (3) ರ ಎರಡು ಅನ್ವಯಗಳು $\{aX, Y, Z^1\}$ ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. $a < 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (4)ರ ಎರಡು ಅನ್ವಯಗಳು $\{aX, Y, Z^1\}$ ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ Z^1 ಕೂಡ Z^2ನ ನಿರ್ಬಂಧಗಳನ್ನೇ ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $Z^1 = Z^2$. $a(X \times Y) = X \times (aY)$ ಸಮತೆಯನ್ನು ಕೂಡ ಇಂಥದೇ ಒಂದು ವಿಧಾನದಿಂದ ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು.

$(X + aY) \times Y = X \times Y$ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ. ಆಗ ಇದರಿಂದ ಮತ್ತು (9) ರಿಂದ (11) ರ ಇನ್ನೊಂದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಸದಿಶಗಳು, ಕೇವಲ ಅವು (0, 0, 0) ಯೊಂದಿಗೆ ಏಕರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ನಾವು ಕೇವಲ $\{X, Y\}$ ಯು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $\{X + aY, Y\}$ ಯು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ $(X + aY) \times Y$ ಮತ್ತು $X \times Y$ ಗಳೆರಡೂ 0 ಆಗಿವೆ. $\{X, Y\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\{X + aY,$

$Y\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. (8)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ $|(X+$ $Y)\times Y|^2 = |X+aY|^2\,|Y|^2-(X+aY, Y)^2 = (|X|^2+$ $(X, Y)+|Y|^2)\,|Y|^2-(X, Y)^2 = 2a(X,Y)\,|Y|^2-a^2(Y, Y$ $= |X|^2|Y|^2-(X, Y)^2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. $(X+aY)\times Y$ ಯು $X\times$ ನಷ್ಟೇ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. $(X+aY)\times Y$ ಯು $X+aY$ ಮ Y ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $(X+aY)\times Y$ ಯು Xಗೆ ಮತ್ತು Yಗೆ ಲ ವಾಗಿದೆ ಎಂದು $\{X+aY, Y, (X+aY)\times Y\}$ ಯು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. (2) ರಿಂದ $\{X, Y, (X+aY)\times Y\}$ ಯು ಒಂ ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಹೀಗೆ $(X+aY)\times Y$ ಇದು $X\times Y$ ಯ ಪಾಲಿಸುವ ಎಲ್ಲ ನಿರ್ಬಂಧಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. $(X+aY)\times Y = X\times Y$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದು (11) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಓರೆ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಎಂದು ಅರ್ಥೈಸಬಹುದು. (6*a*) ಯಿಂದ $|X\times Y|$ ಯು X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ 2 ನೋಡಿರಿ.)



ಚಿತ್ರ–2

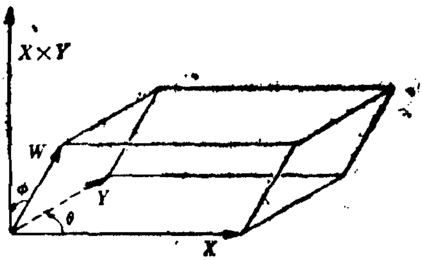
ಈಗ $\{X, Y\}$ ಯು ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $aX+bY+c(X\times Y)=0$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $0=(0, X\times Y)=a(X, X\times Y)+b(Y, X\times Y)+c(X\times Y, X\times Y)=c\,|X\times Y|^2$. ಈ ಕೊನೆಯ ಸಮತೆಯು (6*b*) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತದೆ. (6*a*) ಯಿಂದ $|X\times Y|^2>0$. ಹೀಗೆ $c=0$. ಆದ್ದರಿಂದ $aX+bY=0$. $\{X, Y, X\times Y\}$ ಯು ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಆದ್ದರಿಂದ R^3ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುವುದು. W ವು R^3ನಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶ ಹಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $W=aX+bY+c(X\times Y)$. ನಾವು (6*b*) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ,

(12) $(X\times Y, W)=c|X\times Y|^2.$

ϕವು $X\times Y$ ಮತ್ತು W ನಡುವಿನ ಕೋನವಾಗಿರಲಿ $c\leq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $0\leq\phi\leq\pi/2$ ಮತ್ತು $c<0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\pi/2<\phi\leq\pi$ ಎಂದು (12) ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಕೇವಲ $\{X, Y, c(X\times Y)\}$ ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, (x, y, w) ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು (2) ರಿಂದ ತಿಳಿದಿದೆ. $\{X, Y, X\times Y\}$ ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೇವಲ $c>0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $\{X, Y, c(X\times Y)\}$ ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಯೋಜಿಸಿದರೆ ಇಂತಾಗುತ್ತದೆ :

(13) ϕವು W ಮತ್ತು $X\times Y$ ನಡುವಿನ ಕೋನವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $0\leq\phi<\pi/2$, ಕೇವಲ $\{X, Y, W\}$ ವು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಮತ್ತು $\pi/2<\phi\leq\pi$ ಕೇವಲ $\{X, Y, W\}$ ಯು ಒಂದು ಋಣಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

θವು X ಮತ್ತು Y ನಡುವಣ ಕೋನವಾಗಿರಲಿ. $\theta\neq 0$ ಅಥವಾ π ಮತ್ತು $\phi\neq\pi/2$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $|(X\times Y, W)|=\|X|\,|Y|\,|W|\sin\theta\cos\theta\|$, ಇದು ಕೇವಲ X, Y, W ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ **ಸಮಾಂತರೀಕೃತದ** ಗಾತ್ರವೇ ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 3 ನೋಡಿ.)



ಚಿತ್ರ-3

(14) $(X\times Y, W)=\pm X, Y$ ಮತ್ತು W ಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾಂತರೀಕೃತದ ಗಾತ್ರ, $\{X, Y, W\}$ ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಧನ ಚಿಹ್ನೆಯೊಡನೆ ಮತ್ತು $\{X, Y, W\}$ ಯು ಒಂದು ಋಣಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯೊಡನೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು (13) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

$\{X, Y, W\}$ಯು ಒಂದು ಅವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ X, Y ಮತ್ತು Zಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾಂತರೀಕೃತದ ಗಾತ್ರವನ್ನು 0 ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದು (14) ರೊಂದಿಗೆ ಸುಸಂಬದ್ಧವಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $\{X, Y, W\}$ಯು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $\{X, Y\}$ಯು ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿರಬೇಕು. ($X\times Y=0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ)ಅಥವಾ Wವು X ಮತ್ತು Yಗಳ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿರಬೇಕು(ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ Wವು $X\times Y$ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.)

X, Y ಮತ್ತು Wಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾಂತರೀಕೃತದ ಗಾತ್ರವು Y, W ಮತ್ತು Xಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾಂತರೀಕೃತದ ಗಾತ್ರದಷ್ಟೇ ಇರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಕೇವಲ $\{Y, W, X\}$ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ. $\{X, Y, W\}$ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ [ನೋಡಿ(1)],

(15) $$(X\times Y, W)=(Y\times W, X)$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ $(X\times Y, W)$ ಮತ್ತು $X\times Y$ಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೊಡಬಲ್ಲೆವು.

$X=(x_1, x_2, x_3)$, $Y=(y_1, y_2, y_3)$, ಮತ್ತು $W=(w_1, w_2, w_3)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

(16) $$(X\times Y, W)=det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}.$$

(16)ನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು

$$A=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$ ಆಗಿರಲಿ.

ಮತ್ತು $d(A)=(X\times Y, W)$ ಆಗಿರಲಿ. $d(A)$ ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು. Aಯ ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ Aಯಿಂದ A' ದೊರೆಯಲಿ. ಇವು ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು

ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (9) ರಿಂದ $d(A') = -d(A)$. ಇವು ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ (16) ಮತ್ತು (9) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ, $d(A') = (W\times Y, X) = (Y\times X, W) = -(X\times Y, W) = (-d(A)$ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ, ಆಗ ಇಂಥದೇ ಒಂದು ಸಾಧನೆಯು $d(A') = -d(A)$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ ಇದು ಭಾಗ 6 ರ (8a) ಯು $d(A)$ ಗೆ ಸರಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

$a(X\times, YW) = (X\times Y, aW) = (a(X\times Y), W) = ((aX) \times Y, W) = (X\times (aY), W)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, (10) ನ್ನು ಮತ್ತು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ, ಭಾಗ 6 ರ (8b) ಯು $d(A)$ ಗೆ ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಭಾಗ 6ರ (8c) ಯನ್ನು $d(A)$ ಯು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು (11) ಮತ್ತು (15) ರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿದೆ. ಅದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಒಂದು ಅಭ್ಯಾಸದಂತೆ ಬಿಟ್ಟಿದೆ.

$X^1 = (1, 0, 0)$, $X^2 = (0, 1, 0)$ ಮತ್ತು $X^3 = (0, 0, 1)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ (6)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $X^1\times X^2 = X^3$ ಎಂದು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ $(X^1\times X^2, X^3) = 1$, $d(I) = (X^1\times X^2, X^3)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಭಾಗ 6 ರ (8d) ಯು ಸಾಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $d(A)$ ಯು ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ. 3×3 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೇಲೆ ಅಂತಹ ಒಂದೇ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಮಾತ್ರ ಇರುವುದರಿಂದ $d(A) = det\ (A)$ ಎಂದು ಹೊಂದಿರಲೇಬೇಕು. ಇದು (16) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಫಲಿತಾಂಶ (16) ಅನೇಕ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. [ಭಾಗ 6 ರ (19) ನೋಡಿರಿ.]

(17) $(X\times Y, W)$ ಯು ಇತರ ಎರಡು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಚರಾಂಕದ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ, $((aX^1 + bX^2)\times Y, W) = a(X^1\times Y, W) + b(X^2\times Y, W)$ $(X\times (aY^1 + bY^2), W) = a(X\times Y^1, W) + b(X\times Y^2, W)$; ಮತ್ತು $(X\times Y, aW^1 + bW^2) = a(X\times Y, W^1) + b(X\times Y, W^2)$. $\{X^1, X^2, X^3\}$ ಯು ನಿಯತ ಆಧಾರ

ವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

(18) $$X \times Y = (X \times Y, X^1)X^1 + (X \times Y, X^2)X^2 + (X \times Y, X^3)X^3,$$

ಆಗುವುದರಿಂದ, $X = (x_1, x_2, x_3)$ ಮತ್ತು $Y = (y_1, y_2, y_3)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗುಂಟ ಲಾಪ್ಲೇಸ್ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ

$$(X \times Y, X^1) = det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix},$$

$$(X \times Y, X^2) = det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -det \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{bmatrix},$$

$$(X \times Y, X^3) = det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ

(19) $$X \times Y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

ಟೀಕೆಗಳು : ಫಲಿತಾಂಶ (16), ಫಲಿತಾಂಶ (15) ರೊಂದಿಗೆ ಸಂಯುಕ್ತವಾಗಿ $det(A)$ ಅನ್ನು A ಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ n–ಆಯಾಮದ ಸಮಾಂತರೀಕೃತದ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟ n–ಆಯಾಮದ ಗಾತ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಪೂರ್ಣ ಸಮರ್ಥನೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

(19) ನ್ನು (6) ರಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ಸಿದ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿತ್ತು ಮತ್ತು ಓರೆ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಲು (19) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿತ್ತು. (19) ನ್ನು ಕೊನೆಗೆ ಸಿದ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ್ದೇಕೆಂದರೆ ಈ ವಿಧಾನವು ಓರೆ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಜ್ಯಾಮಿತಿಕ ಗುಣಧರ್ಮಗಳ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು R^3 ನಲ್ಲಿನ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸದೊಂದಿಗೆ ಅದರ ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಅಂಕನ $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ಮತ್ತು $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ ಯು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಾವು (19) ರ ಈ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ :

$$(20) \qquad X \times Y = det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}.$$

ಅನಂತರ ಕೆಳಗಿರುವುದರ ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗುಂಟ ಒಂದು ಲಾಪ್ಲೇಸ್ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ $X \times Y$ ದೊರಕಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ಮತ್ತು $\mathbf{k}$ ಗಳು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಸೂತ್ರವು ಅಷ್ಟು ಸುಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿಲ್ಲ. ಆದರೂ (19) ನ್ನು ನೆನಪಿಡಲು ಒಂದು ಸರಳರೂಪವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. (20) ರಿಂದ

$$(21) \qquad \begin{array}{ll} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i}; & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} = -\mathbf{k} \times \mathbf{i}; \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j}; & \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \end{array}$$

ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇವುಗಳನ್ನು (6) ರಿಂದ ನೇರವಾಗಿಯೂ ಸಿದ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಒಂದು ದ್ವಿತೀಯ ಓರೆ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ($6c$) ಯನ್ನು ಈ ನಿರ್ಬಂಧದಿಂದ ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟಗೊಳಿಸಿ ಪಡೆಯಬಹುದು

(22) $\{X, Y, Z\}$ ಒಂದು ಋಣಾತ್ಮಕ ತ್ರಿವಳಿಯಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು $X \otimes Y$ ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸೋಣ. ಆಗ $X \otimes Y = Y \times X$. (22) ರ ಮೇಲೆ ($6c$) ಯನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಯಾವ ವಿಶಿಷ್ಟ ಕಾರಣವೂ ಇಲ್ಲ. ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಯಶಃ ಯಾವ ಓರೆ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಲು 'ಬಲಗೈ ನಿಯಮ' ಅಥವಾ 'ಎಡಗೈನಿಯಮ' ಎಂದು ಕರೆಸಿ

ಕೊಳ್ಳುವ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಬಲಗೈಯ ಸೂಚಿಬೆರಳನ್ನು i ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯೂ, ಬಲಗೈಯ ಮಧ್ಯದ ಬೆರಳನ್ನು j ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು ಬಲಗೈಯ ಹೆಬ್ಬೆರಳನ್ನು k ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯೂ ತೋರಬಲ್ಲೆವಾದರೆ, $\{i, j, k\}$ ಯು 'ಬಲಗೈ ನಿಯಮ'ದಿಂದ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. $\{i, j, k\}$ ಯು ಬಲಗೈ ನಿಯಮದಿಂದ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ ಮತ್ತು $(6c)$ ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ, ಆಗ ನಾವು $\{X, Y, X \times Y\}$ ಕೂಡಾ ಬಲಗೈ ನಿಯಮದಿಂದ ಸ್ಥಾನವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $X \times Y$ ಅನ್ನು X ಮತ್ತು Y ಗಳ 'ಬಲಗೈ' ಓರೆಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಆದರೆ ಸಾಧನೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಕಠಿಣವೂ ಆಗಿವೆ.

$X \times Y$ ಅನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವಾಗ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಬಳಕೆಯು ಕೂಡ ನಿರಂಕುಶವಾಗಿದೆ. $(X, Y)_1$ ಯು ಇನ್ನೊಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಇದರ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ಓರೆಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲು (6) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ (6) ರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಕೋನದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು $(X, Y)_1$ ನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲೇಬೇಕು.

ಓರೆ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸುಲಭವಾಗಿ ಉನ್ನತತರ ಆಯಾಮಗಳಿಗೆ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣವಾಗುವುದಿಲ್ಲ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ R^4 ಮೇಲೆ, $(6a)$ ಮತ್ತು $(6b)$ ನಿರ್ಬಂಧಗಳು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಮಾತ್ರ ವಿವರಿಸುತ್ತವೆ; ಅಂದರೆ $(6b)$ ಯನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ ಮತ್ತು $(6a)$ ಯಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಉದ್ದದ ಆ ಸದಿಶಗಳು ಅವುಗಳ ಅಂತಿಮಬಿಂದುಗಳನ್ನು $\{X, Y\}$ ನ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಆಯಾಮದ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಹೊಂದಿವೆ. ಈ ವೃತ್ತದಿಂದ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಸದಿಶವನ್ನು ಎತ್ತಿಕೊಳ್ಳಲು ಅವಕಾಶ ಕೊಡುವ $(6c)$ ಯಂತಹ ಒಂದು ಸರಳ ನಿರ್ಬಂಧ ಬೇರೆ ಇಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. ಈ ಅಭ್ಯಾಸವು ಕೆಲವು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಓರೆ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಗೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಂಸ್ಕರಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಭಾಗದ ಮೊದಲನೇ ಪರಿಚ್ಛೇದವಿರುವಂತೆ R^3ಯು V ಯೊಡನೆ ಸಮೀಕರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಆಕೃತಿ

ಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು ಸಹಾಯಕವಾಗಬಹುದು.

(a) X, Y ಮತ್ತು Z ಗಳನ್ನು ಶೃಂಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $\frac{1}{2}\ |(X-Z)\times(Y-Z)|$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) X, Y, Z ಮತ್ತು W ಗಳನ್ನು ಶೃಂಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಷಡ್ಭುಜಾಕೃತಿಯ ಗಾತ್ರವು $\frac{1}{6}\ |((X-W)\times(Y-W), Z-W)|$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(c) X ನಿಂದ Y ಮತ್ತು Z ಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಿರುವ ರೇಖೆಗೆ ಇರುವ ಲಂಬದೂರವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ:

$$\frac{|(X-Z)\times(Y-Z)|}{|Y-Z|}.$$

(d) X ನಿಂದ Y, Z ಮತ್ತು W ಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಿರುವ ಸಮತಲಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬದೂರವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ:

$$\frac{|((X-W)\times(Y-W), Z-W)|}{|(Y-W)\times(Z-W)|}$$

(e) X ಮತ್ತು Y ಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಿರುವ ರೇಖೆಗೂ, ಮತ್ತು Z ಮತ್ತು W ಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಿರುವ ರೇಖೆಗೂ ನಡುವೆ ಇರುವ ದೂರವು

$$\frac{|((X-Y)\times(Z-W), X-Z)|}{|(X-Y)\times(Z-W)|}$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

2. ಸದಿಶ ಅಂಕನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಾನಾ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ವಿವರಿಸಬಹುದು. ಇವು ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಸತ್ಯವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(a) Y ನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರವನ್ನೂ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ r ಅನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಗೋಲವು $|X - Y| = r$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ X ಸದಿಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿವೆ.

(b) Y ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು Z ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಿರುವ ಸಮತಲವು $(X - Z, Y) = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ X ಸದಿಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿದೆ.

(c) Y ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಿರುವ, Z ಮತ್ತು 0 ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಿರುವ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯು $(X - Y) \times Z = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ X ಸದಿಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿದೆ. [ಸೂಚನೆ: (ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

3. ***ಕೆಳಗಿರುವ R^3 ನಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಜ್ಯಾಮಿ ಗುಣಧರ್ಮವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.***

(a) Y ಮತ್ತು Z ಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವ, $X \times Y = Z$ ಆಗಿರುವಂತೆ, ಎಲ್ಲ X ಗಳ ಸಂಗ್ರಹ.

(b) Y ಮತ್ತು Z ಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, $(X \times Y, Z) = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ, ಎಲ್ಲ X ಗಳ ಸಂಗ್ರಹ.

(c) Y ಮತ್ತು Z ಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವಲ್ಲಿ $(X \times Y, X \times Z) = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ X ಗಳ ಸಂಗ್ರಹ.

4. $X = (1, 0, 1)$, $Y = (0, 1, 1)$, $Z = (1, 1, 1)$, $W = (1, 2, 3)$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(a) $(X \times Y, Z)$

(b) $(3X - 2Y + Z) \times W$

(c) $X \times Y + 3Z \times Y$

(d) $(X \times Y) \times (Y \times Z)$

(e) $(((X \times Y) \times W) \times Z) \times W$

(f) X, Y ಮತ್ತು W ಗಳು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವಂತಹ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ.

(g) X, $X+Y$, Z, $Z+W$ ಗಳನ್ನು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಷಡ್ಭುಜಾಕೃತಿಯ ಗಾತ್ರ.

(h) Y ನಿಂದ X ಮತ್ತು Z ಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಿರುವ ರೇಖೆಗಿರುವ ಲಂಬದೂರ.

(i) X ಮತ್ತು Y ಮೂಲಕ Z ಮತ್ತು W ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ದೂರ.

(j) W ನಿಂದ X, Y ಮತ್ತು Z ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಿರುವ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಇರುವ ಲಂಬದೂರ.

$d(A)$ ಯು ಭಾಗ (6) ರ ($8c$) ಯನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವುದರಿಂದ (16) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.

ನಿಯುತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, $\{Y^1, Y^2, Y^3\}$ ಯು R^3 ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. $Y^1 \times Y^2 = \pm Y^3$ ಎಂದೂ ಮತ್ತು $Y^1, Y^2 = Y^3$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $Y^1 \times Y^3 = -Y^2$ ಮತ್ತು $Y^2 + Y^3 = Y^1$ ಎಂದೂ ತೋರಿಸಿ. [**ಸೂಚನೆ :** $Y^1 \times Y^2 = \pm Y^3$ ಎಂದೂ, $Y^1 \times Y^3 = \pm Y^2$ ಎಂದೂ ಮತ್ತು $Y^2 \times Y^3 = \pm Y^1$ ಎಂದೂ ತೋರಿಸಲು ($6a$) ಮತ್ತು ($6b$) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. ಅನಂತರ (14) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

$(X \times Y) \times Z = (X, Z)Y - (Y, Z)X$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ :** X, Y ಮತ್ತು Z ಗಳು $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$ ಅಥವಾ $\mathbf{k} = (0,0,1)$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದಾಗಿರುವಾಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ರೂಪಿಸಿರಿ. X ನಿರಂಕುಶವಾಗಿರುವಾಗ ಮತ್ತು Y ಮತ್ತು Z ಗಳು **i**, **j** ಅಥವಾ **k** ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದಾಗಿರುವಾಗ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು (17)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪುನಃ (17) ನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ಅನ್ವಯಿಸಿರಿ.]

8. ಅಭ್ಯಾಸ 7ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಕೆಳಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಸ್ಥಾಪಿಸಿ

(a) $(X\times Y)\times Z+ (Z\times X)\times Y+(Y\times Z)\times X=($

(b) $\{X, Z\}$ ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ ಆಗ ಕೇವಲ $(Y, Z)=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $(X\times Y)\times$ $Z=X\times(Y\times Z)$.

9. (a) (15) ನ್ನು ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a ಮತ್ತು ಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ X, Y, W^1 ಮತ್ತು W^2 ಗಳಿ $(X\times Y, aW^1+bW^2)=a(X\times Y, W^1)+$ $(X\times Y, W^2)$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ (17 ನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಿ. ಇದು ಭಾಗ 6 ರ (19) ರ ಒಂದ ಪರ್ಯಾಯ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

(b) $(aX^1+bX^2)\times Y=a(X^1\times Y)+b(X^2+Y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

10. R^3 ಯು ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರಲಿ. T ಯ R^3 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ವಿಷಮಸಮಾಂಗ ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ ಅಂದರೆ, $T^*=-T$. $TX=Y\times X$ ಆಗಿರುವಂತೆ R^3ನ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಸದಿಶ Y ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : T ದ ಮಾತೃಕೆಯು ಕೆಳಗಿನ ರೂಪದ್ದಾಗಿದೆ

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -v & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix},$$

$Y=(-c, b, -a)$ ಆಗಿರಲಿ.]

11. $\{X, Y, Z\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು T ಯು R ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. $det\,(T)=$ $(TX\times TY, TZ)/(X\times Y, Z)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** ಭಾಗ 6 ರ (16) ನ್ನು ಮತ್ತು (33) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಅನೇಕ ಅನ್ವಯಗಳಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಕೆಲವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ. *Robinson* [22], ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಅನ್ವಯಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. *Klein* [18] ನಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಹೆಚ್ಚು ಪುರಾತನ, ಸಂಪೂರ್ಣ ಮತ್ತು ಹೆಚ್ಚು ಪಠನಾರ್ಹ ಸಂಸ್ಕರಣವು ಇದೆ.

ಹಿಲ್‌ಬರ್ಟ್ ಸಮಷ್ಟಿಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ, ಅನಂತ ಆಯಾಮದ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟವರ್ಗವು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪ್ರವೇಶಿಕೆಯು *Berberian* [2] ನಲ್ಲಿದೆ. ಫೋರಿಯರ್ ಶ್ರೇಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮತ್ತು ಲಂಬೀಯತೆಯ ಅನ್ವಯಗಳಿಗೆ *Tolstov* [25, ಅಧ್ಯಾಯ 2] ನೋಡಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಗುವ ಉದ್ದದ ಒಂದು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯಿಂದ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅಂಕುರಿಸುತ್ತದೆ. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಈ ವಿಷಯದ ಒಂದು ಪ್ರತಿಭಾಪೂರ್ಣ ಸಂಸ್ಕರಣಕ್ಕೆ, *Nickerson, et al* [21, ಅಧ್ಯಾಯಗಳು 6–8] ನೋಡಿರಿ.

ಭಾಗ 5 ರ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ ಮತ್ತು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, *Kaplan* [16] ನೋಡಿ. ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು *Aitken* [1] ನಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಅನೇಕ ಚಲನಕಲನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕ್ರೇಮರನ ನಿಯಮದ ಒಂದು ಅನಂತ ಆಯಾಮದ ಸದೃಶವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ *Lovitt* [20, ಅಧ್ಯಾಯ 3] ನೋಡಿ. ಓರೆ ಗುಣಲಬ್ಧದ ವಿವಿಧ ಅನ್ವಯಗಳಿಗೆ *Kaplan* [17] ನೋಡಿರಿ. ಓರೆ ಗುಣಲಬ್ಧವು 3ಕ್ಕಿಂತ ಬೇರೆ ಆಯಾಮಗಳಲ್ಲಿ ಲಭ್ಯವಿಲ್ಲ. ಟೆನ್ಸಾರ್ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಿತ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗೆ *Smirnov* [24, ಅಧ್ಯಾಯ 3] ಮತ್ತು *Jacobson* [15, ಅಧ್ಯಾಯ 7] ನೋಡಿರಿ.

ಭಾಗ 4 ರ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗವಾಗುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿವೆ. ಈ ಪ್ರಮುಖ ನೂತನ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿನ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಉಪಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆಯನ್ನು *Ficken* [9]ರಲ್ಲಿ ನೋಡಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಬಿಡಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ

ಭಾಗ 1. ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು : I

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಅನೇಕ ಪ್ರಯೋಜನಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ವಿವಿಧ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ ಬಿಡಿ ಪರಿಕರ್ಮಿಗೆ ಸೀಮಿತವಾದ ಸಾಹಿತ್ಯದ ಬಗ್ಗೆ ಗಣನೀಯ ವಿಷಯ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿದೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯವು ಇಂತಹ ಕೆಲವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಪರಿಚಯ ಕುರಿತಾಗಿದೆ. Tಯು Vಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, Tಯ ಬಗ್ಗೆ ಅನೇಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳೇ ಹುಟ್ಟುತ್ತವೆ. T ಗೆ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೆಂದು ಅಧ್ಯಾಯ 1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಯಿತು. ಅನಂತರ ಮಾತೃಕೆ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ T ಯ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಲಾಯಿತು. ಈ ಮಾತೃಕೆ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಾಕಾರದ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು, T^2 ಅನ್ನು ಮತ್ತು T ಯ ಇತರ ಘಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲೂ ಕೂಡ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು. $\dim V$ ಯು ವಿಶಾಲವಾಗಿದ್ದಾಗ, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಗಣನೆಗಳು ಬಹಳ ಕ್ಲಿಷ್ಟ. T ಯು ಒಂದು ಏಕಮಾತೃಕೆ ನಿರೂಪಣೆಗೇ ಮಿತಿಗೊಂಡಿದ್ದರೆ, ಇದು ಒಂದು ಗಂಭೀರವೆನಿಸುವ ಅಡಚಣೆಯಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ V ಗೆ ಒಂದು ಚತುರ ಆಯ್ಕೆ ಆಧಾರದಿಂದ T ಗೆ ಒಂದು 'ಸರಳ' ಮಾತೃಕೆ. ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬಹುದು. ಅಧ್ಯಾಯ 1 ರಲ್ಲಿ ನೋಡಿದಂತೆ, ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಾಕಾರವು ಅತ್ಯಂತ ಸರಳವಾಗಿದೆ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಲಾಗುವುದು. T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವಂತೆ, V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ? ಹಾಗಿದ್ದರೆ, T ಯ ಬಗ್ಗೆ ಉತ್ತರಿಸಬಹುದಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಎಂತಹವು? ಮೊದಲನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರವು ಯಾವಾಗಲೂ ಅಂಗೀಕಾರಾತ್ಮಕವಲ್ಲ, ಆದರೆ ಅದೃಷ್ಟವಶಾತ್ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಅದು ಅಂಗೀಕಾರಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ T ಯು ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯಗಳನ್ನು ಕುರಿತ

ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಸಹಜವಾಗಿ ಕೆಲವು ಬಹುಪದಿಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ದಾರಿ ಮಾಡುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನೂ ತೋರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. 2 ಮತ್ತು 3ನೇ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಬಹುಪದಿಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗುವುದು. ಅನಂತರ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಭಾಗ 4 ರಲ್ಲಿ ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆ ನಿರೂಪಣೆಗಳ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಲಾಗುವುದು. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಮುಖ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಭಾಗ 4 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅಂದರೆ ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ ಫಲಿತಾಂಶದ ಅನ್ವಯಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯ 4 ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಈಗ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಡನೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಲಾಗುವುದು.

Tಯು ಕೆಳಗಿರುವಂತೆ R^2 ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ.

(1) $T(x,y) = (x', y')$ ಇದು ಕೇವಲ $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

$\{(1, 1), (1, -1)\}$ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಗಣಿಸಿ. ಇದರಿಂದ

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ಮತ್ತು

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ಆಗುವುದರಿಂದ

(2) $T(1, 1) = 2(1, 1)$ ಮತ್ತು $T(1, -1) = 4(1, -1)$.

ಹೀಗೆ $\{(1, 1), (1, -1)\}$ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಕೆಳಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ,

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ಇದು ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆ.

ಈ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ T ಗಾಗಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ನಿರ್ವಹಿಸಬಹುದಾದ ಕೆಲವು ಗಣನೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಮಾಡೋಣ. k ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ≥ 1 ಅನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, $\{(1,1), (1,-1)\}$ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T^k ಯ ಮಾತೃಕೆಯು

ಇಂತಾಗುತ್ತದೆ.

(3) $$\begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{bmatrix}$$

T ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ; ಏಕೆಂದರೆ

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ಮಾತೃಕೆಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $\{(1, 1), (1, -1)\}$ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T^{-1} ನ ಮಾತೃಕೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ,

(4) $$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

'λ' ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$TX = Y + \lambda X \text{ ಮತ್ತು}$$

$TX = Y + \lambda X$ ಇವೆರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ.

(5) $\{(1, 1), (1, -1)\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ $T - \lambda I$ ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ,

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

ಹೀಗಿರುವುದರಿಂದ ಕೇವಲ ಈ ಮಾತೃಕೆಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು Y ಗೂ (5) ಒಂದು ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರ X ಅನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ; ಅಂದರೆ, ಕೇವಲ $\lambda \neq 2$ ಮತ್ತು $\lambda \neq 4$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

T ಯು ಒಂದು ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆಯೇ? ಬೇರೆ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ, $S^2 = T$ ಆಗಿರುವಂತೆ R^2 ಮೇಲೆ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿ S ಇದೆಯೇ? ಕೆಳಗಿರುವುದರ ಸರಳ ರೂಪದಿಂದ ಇದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಉತ್ತರಿಸುವುದು ಶಕ್ಯವಾಗಿದೆ.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\{(1, 1), (1, -1)\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಕೆಳಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ R^2 ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು S ಆಗಿರಲಿ

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ಆಗ

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $S^2 = T$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲಾಗುವುದು.

k ಯು ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ≥ 1 ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\{(1,1),(1,-1)\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ಕೆಳಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ R^2 ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು R ಆಗಿರಲಿ

$$\begin{bmatrix} 2^{1/k} & 0 \\ 0 & 4^{1/k} \end{bmatrix}$$

ಆಗ

(ii) $R^k = T$. ಇದು ಕೆಳಗಿನ ಸಂಗತಿಯಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

$$\begin{bmatrix} 2^{1/k} & 0 \\ 0 & 4^{1/k} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ಈಗ ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಲಾಗುವುದು. V ಯು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮದ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವಂತೆ V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಇದ್ದರೆ T ಯು **ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ** ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದು. ಹೀಗೆ (1) ರಲ್ಲಿಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು R^2 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ.

T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು ಈ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಕರ್ಣರೇಖೀಯವಾಗಿರುವಂತೆ V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. A ಯು $\{X^1, X^2,$

…. $X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$(7) \qquad A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix} \text{ ಇದರಿಂದ}$$

$$(8) \qquad det\,(T) = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

ಕೇವಲ $d_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. T^{-1} ಅನ್ನು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ವಿವರಿಸಬಹುದು; ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T^{-1}ನ ಮಾತೃಕೆಯು A^{-1} ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು

$$(9) \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix} \quad d_i \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \text{ ಆಗಿದ್ದರೆ.}$$

k ಯು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ≥ 1 ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಇದರ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T^k ಯ ಮಾತೃಕೆಯು A^k ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ

$$(10) \qquad A^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2^k & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & d_n^k \end{bmatrix}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ $d_i \geq 0$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು k ಯು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ≥ 1 ಆಗಿರಲಿ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ V ಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು R ಆಗಿರಲಿ.

$$(11) \qquad B = \begin{bmatrix} d_1^{1/k} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2^{1/k} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & d_n^{1/k} \end{bmatrix}.$$

ಆಗ $B^k = A$ ಆಗುವುದರಿಂದ

$$(12) \qquad R^k = T.$$

λ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

(13) $TX = Y + \lambda X$ ಇದು ಕೇವಲ $(T - \lambda I)X = Y$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

$\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ $T - \lambda I$ ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ

$$(14) \qquad C = \begin{bmatrix} d_1 - \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 - \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & d_n - \lambda \end{bmatrix}.$$

ಹೀಗೆ ಕೇವಲ $det\ (c) \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, ಅಂದರೆ, $i = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ $\lambda \neq d_i$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $TX = Y + \lambda X$ ಯು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು Y ಗೂ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರ X ಅನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಗಣನೆಯ ಸರಳತೆಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರಬೇಕು. ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿರುವಾಗ ದೊರಕುವ ಹೆಚ್ಚು ಸರಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖ ಪ್ರಶ್ನೆಯೆಂದರೆ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂದು ಹೇಗೆ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದೆಂಬುದು. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಸರಳವಾದ ಉತ್ತರವಿಲ್ಲ. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಖಚಿತಪಡಿಸುವ ಒಂದು ನಿರ್ಬಂಧವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುವುದು ಭಾಗ 4 ರಲ್ಲಿ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳನ್ನು ಸ್ವರೂಪಾಂಕಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅನಂತರ ಯಾವುದಾದರೂ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯು ಸಮಾಂಗವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, ಆಗ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು.

ಆಧಾರ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು A ಆಗಿರಲಿ. A ಯು (7) ರ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತೆ A ಯು ಕರ್ಣರೇಖೀಯ ವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ A ಯು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದಿಂದ

(15) $TX^i = d_i X^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$TX^i = d_i X^i$ ಸಮೀಕರಣವೂ ಕೆಳಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣವೂ ಒಂದೇ ಆ

$$(d_i I - T)X^i = 0.$$

$X^i \neq 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $d_i I - T$ ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ, ಅಂದರೆ,

$$det\ (d_i I - T) = 0. \quad \text{ಇದು } i = 1, 2, \ldots, n \text{ ಗೆ.}$$

ಈಗ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೊಸ ಪದವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ.

T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. $CI -$ ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ C ಯನ್ನು T ಒಂದು **(ವಾಸ್ತವಿಕ) ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. V ಪಾಂತ ಆಯಾಮವುಳ್ಳದ್ದಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಕೆಳಗಿರು ಸಮಾನಾರ್ಥಕಗಳಾಗಿವೆ.

(a) c ಯು T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ.

(b) ಶೂನ್ಯತೆ $(cI-T) \neq 0$.

(16) (c) $TX = cX$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸದಿಶ $X \neq 0$ ಇದೆ.

(d) $det\ (cI - T) = 0$.

(16) ರ ಸಾಧನೆಯು ಅಧ್ಯಾಯ 2, ಭಾಗ 6 ರ (15) ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 10 ರಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತವೆ. $TX = cX$ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶ $X \neq 0$ ಇದನ್ನು c ಗೆ **ಸೇರಿರುವ** (T ಯ) ಒಂದು **ಸ್ವರೂಪಾಂಕಸದಿಶ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. c ಯು T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $cI - T$ ಯು ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು c ಗೆ ಸೇರಿರುವ **ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ ಕೆಳಗಿನಂತಾಗುತ್ತದೆ,

(17) T ಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿಪ್ಪ ಒಂದು ಆಧಾರವು V ಗೆ ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ.

T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು (15) ಸಫಲ ವಾಗುವಂತೆ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. ($16c$) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಲ್ಲಿ d_i ಯು T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆ

ಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $i = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ X^i ಯು d_iಗೆ ಸೇರಿರುವ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ T ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ, V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ X^iಯು d_iಗೆ ಸೇರಿರುವ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶವಾಗಿರುವಂತೆ ಇರಲು ಆಗ (15) ರ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಫಲವಾಗುವುದರಿಂದ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ. ಇದು (17) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತದೆ.

T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಯು, $det\ (cI - T) = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ c ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸಮಸ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅಂತಹ c ಗಳಿಗೆ 'ಸಾಕಷ್ಟು' ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸಮಸ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆ. $det\ (cI-T) = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು T ಯ **ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸಮೀಕರಣ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. $det\ (cI-T) = 0$ ಯು 'ಸಾಕಷ್ಟು' ವಾಸ್ತವಿಕ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಲು ಅಥವಾ ಒಂದು ದತ್ತಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯು 'ಸಾಕಷ್ಟು' ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದದಿರಲು T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಲಾರದು. ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

T ಯು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ R^2 ಮೇಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ·

(18) $T(x, y) = (x', y')$ ಇದು ಕೇವಲ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.

ಆಗ, (16c) ಯಿಂದ, ಕೇವಲ ಕೆಳಗಿರುವಂತಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯು c ಆಗಿದೆ.

(19) $$det \begin{bmatrix} c-1 & 2 \\ -1 & c+1 \end{bmatrix} = 0.$$

ಆದ್ದರಿಂದ

$$det \begin{bmatrix} c-1 & 2 \\ -1 & c+1 \end{bmatrix} = c^2 + 1$$

ಮತ್ತು $c^2 + 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ವಾಸ್ತವಿಕ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಹೀಗೆ T ಯು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿರಲಾರದು.

T ಯು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ R^2 ಮೇಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಆಗಿರಲಿ

(20) $T(x,y) = (x',y')$ ಇದು ಕೇವಲ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

ಆಗ, ಕೇವಲ ಕೆಳಗಿನಂತಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ c ಯು T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆ ಆಗಿದೆ.

(21) $$\det \begin{bmatrix} c-1 & -1 \\ 0 & c-1 \end{bmatrix} = (c-1)^2 = 0.$$

ಹೀಗೆ $c = 1$ ಯು T ಯ ಏಕಮಾತ್ರ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (17) ರಿಂದ ಕನಿಷ್ಠ ಎರಡು ನಿರವ ಲಂಬಿತ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು $T(x,y) = (x,y)$ ಗೆ ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, ಶೂನ್ಯತೆ $(I - T) = 2$. $I - T$ ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇರುವುದರಿಂದ

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$(I - T)$ 1 ಎಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಆಗಿಲ್ಲ.

$T = I$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$\det(cI - T) = \det \begin{bmatrix} c-1 & 0 \\ 0 & c-1 \end{bmatrix} = (c-1)^2.$$

ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ I ಮತ್ತು (20)ರ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಒಂದೇ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎಂದೂ, ಆದರೂ I ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ಮತ್ತು (20) ರ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದೂ ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಲು, ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸಮೀಕರಣವು, ಅದು ವಾಸ್ತವಿಕ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೂ ಕೂಡ **ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ** ಸಾಕಷ್ಟು ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕೊಡುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೂ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸಮೀಕರಣವು ನಮಗೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಒದಗಿಸುವಂಥ ಒಂದು ಸನ್ನಿವೇಶವಿದೆ.

(22) $n = \dim V$, $\det(cI - T) = 0$ ವು $d_1, d_2, \dots, d_n$ ನಂತೆ n ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ [ಅಂದರೆ, $i \neq j$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $d_i \neq d_j$ ಮತ್ತು $i = 1, 2, \dots, n$ ಗೆ $\det(d_i I - T) = 0$], ಆಗ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಇದು ಕೆಳಗಿರುವುದರ ಒಂದು ಪರಿಣಾಮವಾಗಿದೆ.

ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ 3. $i = 1, 2, \ldots, k$ ಗೆ $det(d_i I - T) = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ $d_1, d_2, \ldots, d_k$ ಗಳು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. $i = 1, 2, \ldots, k$ ಗೆ X^iಯು d_iಗೆ ಸೇರಿರುವ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ: $i=1, 2, \ldots, k$ ಗೆ $X^i \neq 0$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $TX^i = d_i$ ಎಂದು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. $a_1X^1 + a_2X^2 + \cdots + a_kX^k = 0$ ಎಂದು ...ಕೊಳ್ಳೋಣ. $S_1 = (d_2I - T)(d_3I - T)\cdots(d_kI - T)$ ಆಗಿರಲಿ.

) $a_1S_1X^1 + a_2S_1X^2 + \cdots + a_kS_1X^k = 0.$

$i = 1, 2, \ldots, k,$ S_1X^i ಅನ್ನು ಗಣಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ $S_1X^k =$ $- T)((d_3I - T)\cdots((d_{k-1}I - T)((d_kI - T)X^k))\ldots).$ $^k = d_kX^k$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $(d_kI - T)X^k = 0$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. $^k = 0.$ ಅಲ್ಲದೆ

$^{k-1}$

$= (d_2I - T)((d_3I - T)\cdots((d_{k-1}I - T)((d_kI - T)$ $^1))\cdots).$ $TX^{k-1} = d_{k-1}X^{k-1}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$(d_kI - T)X^{k-1} = (d_k - d_{k-1})X^{k-1}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$(d_{k-1}I - T)(d_kI - T)X^{k-1} = (d_k - d_{k-1})(d_{k-1}I - T)$ $^1 = 0,$ ಅಂದರೆ, $S_1X^{k-1} = 0.$ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $S_1X^i = 0,$ ಇದು $, 3, \ldots, k$ ಗೆ ಮತ್ತು $S_1X^1 = (d_2-d_1)(d_3-d_1)\cdots(d_k-d_1)X^1.$ (23) ಕೆಳಗಿನ ರೂಪಕ್ಕೆ ಸಂಕುಚಿಸಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

$$a_1(d_2-d_1)(d_3-d_1)\cdots(d_k-d_1)X^1 = 0.$$

$X^1 \neq 0$ ಮತ್ತು $d_1 \neq d_i$, $i=2,3,\ldots,k$ ಗೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $a_1 = 0$ ಹೊಂದಿರಲೇಬೇಕು. $S_2 = (d_1I - T)(d_3I - T)\cdots(d_kI - T)$

ಆಗಿರಲಿ ; ಅಂದರೆ $i \neq 2$ ಗೆ S_2 ವು $(d_i I - T)$ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾ. ಆಗ $a_1 X^1 + a_2 X^2 + \cdots + a_k X^k = 0$ ಇದರಿಂದ

(25) $$a_1 S_2 X^1 + a_2 S_2 X^2 + \cdots + a_k S_2 X^k = 0$$ ಆಗಿದೆ.

(23) ರಿಂದ (24) ನ್ನು ದೊರಕಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ,

(26) $$a_2(d_1-d_2)(d_3-d_2)\cdots(d_k-d_2)X^2 = 0$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$i \neq 2$ ಗೆ, $X^2 \neq 0$ ಮತ್ತು $d_2 \neq d_i$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $a_2 = 0$ ಎ ಹೊಂದಿರಲೇಬೇಕು. ಈ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನದ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯು $i = 1, 2, \ldots,$ $a_i = 0$ ಅನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಇದು $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು ಒ ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಟೀಕೆಗಳು : *ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ 3 ರ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪವನ್ನು 20 ಮತ್ತು 2 ಪ್ರಮೇಯಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿವೆ, ಅವುಗಳ ಸಾಧನೆಗಳಲ್ಲಿ S_1 ಮತ್ತು S_2 ಗಳಂ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.*

R^2 ಮೇಲಿನ ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರು T_1 ಆಗಿರಲಿ

(27) $T_1(x, y) = (x', y')$ ಇದು ಕೇವಲ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ

$$det\begin{bmatrix} c-1 & -1 \\ 0 & c-2 \end{bmatrix} = (c-1)(c-2)$$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$c = 1$ ಮತ್ತು $c = 2$ ಗಳು T_1 ಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೋಡ ತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ (22) ರಿಂದ T_1 ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ. T_1ಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿ ಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ R^2 ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು ಕೆಳಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವು ರಿಂದ ದೊರಕುತ್ತದೆ

(28) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

ಇದು T_1ಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ $\{(1, 0), (1, 1)\}$ ಅನ್ನು

R^2ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿ ದೊರಕಿಸುತ್ತದೆ. [ಅಂದರೆ $T_1(1, 0) = (1, 0)$ ಮತ್ತು $T_1(1, 1) = 2(1, 1)$.]

T ಯು (1) ರಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ R^2 ಮೇಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ನಿಯತ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ TT_1ನ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

ಇದರಿಂದ

$$det\,(cI - TT_1) = det\begin{bmatrix} c-3 & -1 \\ 1 & c-5 \end{bmatrix} = c^2 - 8c + 16 = (c-4)^2.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $c = 4$ ಯು TT_1ನ ಏಕಮಾತ್ರ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ.

$$\text{ಶೂನ್ಯತೆ}\,(4I - TT_1) = \text{ಶೂನ್ಯತೆ}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1 \text{ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,}$$

TT_1 ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಆಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೂ T ಮತ್ತು T_1 ಗಳೆರಡೂ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯಗಳಾಗಿವೆ.

T_2 ಯು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ R^2 ಮೇಲಿನ ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ

(29) $T_2(x, y) = (x^1, y^1)$, ಇದು ಕೇವಲ $\begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

ಆಗ (22) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $a = 1$ ಮತ್ತು $c = 2$ ಗಳು T_2ಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ T_2 ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ. T ಯು (1) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ನಿಯತ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ $T + T_1$ನ ಮಾತೃಕೆಯು ಹೀಗಿದೆ.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 99 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

ಇದರಿಂದ

$$det\,[cI - (T + T_1)] = det\begin{bmatrix} c-4 & -99 \\ 1 & c-5 \end{bmatrix} = c^2 - 9c + 118 \text{ ಆಗಿದೆ.}$$

ಸಮಚತುರಸ್ರದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಾವು $T+T_1$ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲವೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 4 ರಲ್ಲಿ S ಮತ್ತು T ಗಳು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದ್ದಾಗಲೆಲ್ಲ $S+$ ಮತ್ತು ST ಗಳು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ಭರವಸೆ ಕೊಡುವ ನಿರ್ಬಂಧವೊಂದನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

'ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆ' ಪದಪುಂಜವು ಅನೇಕ ಸಮಾನಾರ್ಥಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು **ಈಜೆನ್ ಬೆಲೆ, ಗುಪ್ತಮೂಲ, ಮೇಲು ಬೆಲೆ, ಯುಕ್ತಬೆಲೆ** 'ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶ' ಮತ್ತು 'ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ'ಗಳಿಗೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಬೇರೆ ಪದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಕೆಲವು ಲೇಖಕರು T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ **ಸಂಪೂರ್ಣ ಸಂಕುಚಿಸ ಯೋಗ್ಯ** ಅಥವಾ **ಮಿಥ್ಯಬಗೆಯದು** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ. (16d) ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಮತಾ ಸಮೀಕರಣ ಎಂದೂ ಕೂಡ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

V ಯು ಸಾಂತ ಆಯಾಮವಾಗಿಲ್ಲದ್ದಾಗ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವು ಇದೇ ಆಗಿದೆ. ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯತೆ $(cI-T)=0$ ಆಗಿದ್ದರೂ ಕೂಡ $cI-T$ ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದಿರಬಹುದು. ಈ ಕಾರಣದಿಂದ ಅನೇಕ ಬರಹಗಾರರು ಕನಿಷ್ಠ ಎರಡು ವಿಧಗಳ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳ ನಡುವೆ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತಾರೆ; ಅಂದರೆ, ಶೂನ್ಯತೆ $(cI-T)\neq 0$ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆ $(cI-T)=0$ ಆಗಿರುವಂಥವು.

ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ 3ನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು ಮತ್ತು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕನವನ್ನು ದೊರಕಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು. ಇದರ ಬದಲಾಗಿ ಬಹುಪದಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅನೇಕ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಒಂದು ಹೊಸ ದಾರಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಭಾಗ 2 ಮತ್ತು 3 ರಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗುವುದು.

ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ವಿಷಯವಿದೆ. T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ Tಯ ಮಾತೃಕೆಯು A ಆಗಿರಲಿ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಇದಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು, B ಇರಲಿ. ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವಂತೆ V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರುವಂತೆ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಇದೆ ಎಂದರೆ, ಆಗ Tಗೆ

ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅನೇಕ ಗಣನೆಗಳು B ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಸರಳವಾಗುತ್ತವೆ. ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತ A ಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ, ಅಂದರೆ, $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಲು ಬಯಸಬಹುದು. A ಮತ್ತು B ಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 6 ರ (56) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಇದನ್ನು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು A ಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

(1) ರಲ್ಲಿ ಹೀಗಿರಲಿ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

ಆಗ $\{(1, 0), (0, 1)\}$ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು A ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು $\{(1, 1), (1, -1)\}$ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು B ಆಗಿದೆ. [ನೋಡಿರಿ (0).]

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ಆಗಿರಲಿ.}$$

ಆಗ, ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 6 ರ (56)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ ಅಥವಾ ನೇರಗಣನೆಯಿಂದ

(30) $$P_0^{-1}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}P_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ಅಥವಾ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾಗಿ

(31) $$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = P_0\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}P_0^{-1}$$

(3) ರಿಂದ (6) ರವರೆಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು B ಗಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟವು, ಅಂದರೆ, ಆಧಾರ $\{(1, 1), (1, -1)\}$ ನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ, P_0 ಅನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು A ಗಾಗಿ ಕೊಡಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\{(1, 0), (0, 1)\}$ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T^k ಯ ಮಾತೃಕೆಯು A^k ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು $\{(1, 1), (1, -1)\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದುದು B^k ಆಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಅಧ್ಯಾಯ 1 ರ, ಭಾಗ 6 ರ (56) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಲ್ಲಿ

(32) $$P_0^{-1}A^kP_0 = B^k,$$

ಅಥವಾ ಸಮಾನಕವಾಗಿ

(33) $$A^k = P_0 B^k P_0^{-1}$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

k ಯು ದೊಡ್ಡದಾಗಿದ್ದರೆ, A^k ಯನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಗುಣಿಸುವುದು ಸುಲಭವಾ ಕೆಲಸವಲ್ಲ. B^kಯ ಗಣನೆಯು ಕ್ಷುದ್ರವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಸೂತ್ರ (33) ರಿಂ ಗಣನೆಯು ಬಹಳ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಫಲಿತಾಂಶಗಳು (4) ಮತ್ತು (6) ನ್ನೂ ಕೂಡ A ಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಬಹುದು.

(34) $$A^{-1} = P_0 B^{-1} P_0^{-1}.$$

(35) $$D = \begin{bmatrix} 2^{1/k} & 0 \\ 0 & 4^{1/k} \end{bmatrix}$$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $C = P_0 D P_0^{-1}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $C^k = A$

A ಮತ್ತು B ಗಳು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $B = P_0 A P_0^{-1}$ ಆಗಿರು ವಂತ ಒಂದು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ P_0 ಇದ್ದರೆ, A ಯು B ಗೆ **ಸದೃಶವಾಗಿದೆ** ಎನ್ನಲಾಗುವುದು. ($B = P_0 A P_0^{-1}$ ಆಗಿದ್ದರೆ; ಆಗ $A = P_0^{-1} B P_0$ ಆಗುವುದರಿಂದ B ಯು A ಗೆ ಸದೃಶವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ.) A ಯು ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆಗೆ ಸದೃಶವಾಗಿದ್ದರೆ, A ಯು **ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ** ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದು. ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 6 ರ (56) ರಿಂದ ನಾವು ಕೇವಲ A ಯು R^n ಮೇಲಿರುವ ಅಥವಾ $\dim V = n$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿ T ಯ ಯಾವುದೇ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ಮಾತೃಕೆ ಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, A ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. R^3 ಮೇಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (a) T ಯು $X = Z$ ಇರುವ ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಫಲನವಾಗಿದೆ.

   (b) $0 < \theta < \pi$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, T ಯು $x = y = z$ ರೇಖೆಯ ಸುತ್ತ θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ.

   (c) T ಯು $Z = 0$ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದೆ.

(d) $T(x, y, z) = (4x-y, x-y+z, 3x-z)$.

(e) $T(x, y, z) = (3x+y+z, 2y+z, z)$.

2. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿತ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯ ಮೇಲಿನ ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(a) $V = R^3$; $T(x,y,z) = (x, 2x+2y, 3x+3y+3z)$

(b) $V = R^3$; $T(x,y,z) = (3x-y, -x+3y, z)$

(c) $V = R^3$; $T(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z)$

(d) V ಯು ≤ 2 ಸ್ತರದ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; $(Tf)(t) = (1/t)\int_0^t f(u)du$.

(e) V ಯು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; $TA = BA$, ಇಲ್ಲಿ

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

(f) V ಯು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; $TA = BA$ ಇಲ್ಲಿ

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. ಕೆಳಗಿರುವ R^2 ಮೇಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಲ್ಲಿ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯಗಳಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು?

(a) $T(x, y) = (x-y, x+y)$

(b) T ಯು $(0, 0)$ ಸುತ್ತ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ, ಇಲ್ಲಿ $0 < \theta < \pi$.

(c) T ಯು $y = x$ ರೇಖೆಯ ಸುತ್ತ ಪ್ರತಿಫಲನವಾಗಿದೆ.

(d) $T(x, y) = (x-y, x+4y)$.

4. (a) ಅಭ್ಯಾಸ 2 ರ T ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ $k \geq 1$ ಗೆ T^kಯ ಒಂದು ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

(b) ಅಭ್ಯಾಸ 2 ರ ಯಾವ T ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿಗೆ (12) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ, $R^2 = T$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿ R ಅನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲಿರಿ ?

(c) ಅಭ್ಯಾಸ 2 ರಲ್ಲಿರುವ T ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು Y ಗೆ $TX = Y + \lambda X$ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರ X ಅನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ λ ನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

5. ಈ ಅಭ್ಯಾಸವು 2×2 ಪ್ರಸಂಗದ ಒಂದು ಸಂಪೂರ್ಣ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ($dim\ V = 2$) ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ, ಅದರ ಮಾತೃಕೆಯು ಯಾವುದೋ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಹೀಗಿದೆ

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(a) T ಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸಮೀಕರಣವು $det\,(t\,I - T) = t^2 - (a+d)t + ad - bc = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) $(a-d)^2 + 4bc < 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ T ಯು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ :** $(a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc$.]

(c) $(a-d)^2 + 4bc > 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ :** ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ 3 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(d) $(a-d)^2 + 4bc = 0$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಕೇವಲ $T = ((a+d)/2)\,I$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(e) $b = c$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ :** (c) ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆ

ಎಂದು ಅಥವಾ $a=d$ ಮತ್ತು $b=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

6. T ಯು $T(x, y, z) = (ax+by, cx+dy, z)$ ಯಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ R^3 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. ಕೇವಲ ಈ ಕೆಳಗಿರುವಂತಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ಯು}$$

ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆಯಂತೆಯೇ ಇದೆ. [**ಸೂಚನೆ**: T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯು t ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಕೇವಲ $T(x, y, 0) = t(x, y, 0)$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

7. $$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

ಇಲ್ಲಿ B ಯು $n \times n$ ಆಗಿದೆ, c ಯು $k \times k$ ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು 0 ಯು ತಕ್ಕ ಗಾತ್ರದ ಒಂದು ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಕೇವಲ B ಮತ್ತು C ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆಗಳಂತೆಯೇ ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ A ಯು ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆಯಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇದು ಅಭ್ಯಾಸ 6ನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸುತ್ತದೆ.

8. A ಯು ಒಂದು ಊರ್ಧ್ವ ತ್ರಿಕೋನೀಯ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. $i \neq j$ ಗೆ $A_{ii} \neq {}_{jj}$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. A ಯು ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆಯಂತೆಯೇ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ**: $det\ (tI - A) = (t - A_{11})(t - A_{22}) \cdots (t - A_{nn})$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

9. ಮುಂದಿರುವ ಮಾತೃಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆಯಂತೆಯೇ

ಇರುವುವು ಯಾವುವು ? [**ಸೂಚನೆ** : 5 ರಿಂದ 8 ರ ವರೆಗಿನ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಸಹಾಯಕವಾಗಬಹುದು.]

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

10. T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $S^3 = T$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿ S ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

11. A^{23} ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ, ಇಲ್ಲಿ

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

12. V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು (X, Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ. T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ.

(a) ಕೇವಲ c ಯು T^*ದ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ c ಯು Tಯು ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : $(cI-T)^* = cI-T^*$. ಪ್ರಮೇಯ 17 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(b) $c_1 \neq c_2$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $TX^1 = c_1 X^1$ ಮತ್ತು $T^* X^2 = c_2 X^2$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(X^1, X^2) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ: [$(c_1 - c_2)(X^1, X^2) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

(c) $T^* = -T$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು c ಯು T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $c = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : $TX = cX$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $(TX, X) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

13. $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ ಯು $0 \leq t \leq c$ ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರಲಿ.

$$\left(\frac{d}{dt} y_1(t), \frac{d}{dt} y_2(t), \dots, \frac{d}{dt} y_n(t)\right)$$

$(d/dt)\, Y(t)$ ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸೋಣ. T ಯು R^n ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. $i = 1, 2, \dots, n$ ಗೆ $TX^i = c_i X^i$ ಆಗಿರುವಂತೆ, R^nಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು, $\{X^1, X^2, \dots, X^n\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{d}{dt} y(t) = T(Y(t)) \text{ ಯು}$$

$Y(0) = X = a_1 X^1 + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ $Y(t)$ ಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ಪರಿಹಾರವು $Y(t) = a_1 e^{c_1 t} X^1 + a_2 e^{c_2 t} X^2 + \cdots + a_n e^{c_n t} X^n$ ನಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : $\{X^1, X^2, \dots, X^n\}$ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ, $(d/dt)\, Y(t) = T(Y(t))$ ಮತ್ತು $Y(0) = X$ ಯು ಹೀಗಾಗುತ್ತದೆ: $(d/dt)\, Z_i(t) = c_i Z_i(t)$ ಮತ್ತು $Z_i(0) = a_i$, $1 \leq i \leq n$, ಇಲ್ಲಿ $Y(t) = Z_1(t) X^1 + Z_2(t) X^2 + \cdots + Z_n(t) X^n$.]

14. ಅಭ್ಯಾಸ 13 ರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಕೆಳಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣ

ಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

$$\frac{dy_1}{dt} = 3y_1 - y_2 \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_1 + 3y_2$$

ಇಲ್ಲಿ $y_1(0) = 1, y_2(0) = 3$.

15. $0 \leq t \leq 1$ ಗೆ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ $f(t)$ ಯ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯು V ಆಗಿರಲಿ. $Tf(t) = tf(t)$ ಯಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ V ಯ ಮೇಲಿನ ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು T ಆಗಿರಲಿ.

(a) c ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $Tf = cf$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಎಲ್ಲ t ಗಳಿಗೂ $f(t) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) $0 \leq c \leq 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ c ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $cI - T$ ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : $|t - c|^{1/2}$ ಯು $cI-T$ ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿಲ್ಲವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

(c) $c < 0$ ಅಥವಾ $c > 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $cI - T$ ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು $(cI-T)^{-1}$ ಗೆ ಒಂದು ಪರಿಪೂರ್ಣ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ ತೋರಿಸಿರಿ.

16. ಒಂದು 2×2 ಮಾತೃಕೆಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಒಂದು ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : ಅಭ್ಯಾಸ 5 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

ಭಾಗ 2. ಬಹುಪದಿ ಸಿದ್ಧಾಂತ

ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳನ್ನು ಸ್ವರೂಪಾಂಕಿಸಲು ಬಹುಪದಿಗಳ ಮೇಲಿನ ಕೆಲವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಬಹುಪದಿಗಳ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿವೆ.

ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯು ಮುಂದಿನ ರೂಪದ ಒಂದು ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಬೀಜೋಕ್ತಿ

$$f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n.$$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು a_iಯೂ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಒಂದು **ವಾಸ್ತವಿಕ** ಬಹುಪದಿ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. [ಪ್ರತಿಯೊಂದು a_i ಯು ಒಂದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, (1) ನ್ನು ಒಂದು **ಸಮ್ಮಿಶ್ರ** ಬಹುಪದಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು a_i ಯೂ ಒಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲು **ಪರಿಮೇಯ** ಬಹುಪದಿ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.] ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷಿಸಲ್ಪಡದಿದ್ದಲ್ಲಿ, 'ಬಹುಪದಿ' ಎಂಬ ಪದವು 'ವಾಸ್ತವಿಕ ಬಹುಪದಿ' ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನೇ ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಬಹುಭಾಗ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಅಥವಾ ಬಹುಪದಿಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಯಿಸದೆಯೇ ಸಾಗುತ್ತವೆ.

(1) ರಲ್ಲಿ $a_n \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ n ಅನ್ನು f ಬಹುಪದಿಯ ಸ್ತರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು $deg\, f$ ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ; a_n ಅನ್ನು f ನ ಪ್ರಧಾನ ಸಹಗುಣಕ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $f = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ನಾವು f ನ ಸ್ತರವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $f = 8 + 7t + t^3$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $deg\ f = 3$; ಮತ್ತು $g = 4$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $deg\ g = 0$.

f ಮತ್ತು g ಗಳು ಬಹುಪದಿಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ, $f + g$ ಯನ್ನು t ಯ ಸದೃಶ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಂಕಲಿಸುವುದರಿಂದ ದೊರೆತ ಬಹುಪದಿಗಳೆಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ ಮತ್ತು $g = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k$, ಇದು $k \leq n$ ನೊಡನೆ, ಆಗ $f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \cdots + (a_k + b_k)t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \cdots + a_n t^n$. a ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(aa_0) + (aa_1)t + (aa_2)t^2 + \cdots + (aa_n)t^n$ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು $a\,f$ ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲಾಗುವುದು. ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳೊಡನೆ ಎಲ್ಲ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳ ಪರಿಣಾಮ ಇಂತಿದೆ :

(2) $f + g \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $deg\,(f + g) \leq f$ ಮತ್ತು g ಯ ಸ್ತರಗಳ ಗರಿಷ್ಠತೆ. $deg\ f > deg\ g$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $deg\,(f + g) = deg\ f$.

$\leq n$ ಸ್ತರದ ಬಹುಪದಿಗಳು, ಎಲ್ಲ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಒಂದು ಉಪ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು (2) ರ ಒಂದು ಪರಿಣಾಮವಾಗಿದೆ.

$f = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$ ಮತ್ತು $g = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_kt^k$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ನಾವು $(a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)t + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)t^2 + \cdots + a_nb_kt^{n+k}$ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು f ಮತ್ತು g ಗಳ **ಗುಣಲಬ್ಧ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು $f\,g$ ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದ ಪರಿಣಾಮಗಳು ಇಂತಿವೆ :

(3) $\quad f\,g = g\,f,\ (af\,)g = a(f\,g),\ f(g+h) = f\,g + f\,h.$

(4) $\quad f \neq 0$ ಮತ್ತು $g \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f\,g \neq 0$ ಮತ್ತು $deg\,(f\,g) = deg\,f + deg\,g.$

(4) ರಿಂದ ಇವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

(5) $\quad f\,g = f\,h$ ಮತ್ತು $f \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $g = h.$

ಇದನ್ನು ಕೆಲವು ಸಲ **ವರ್ಜನಾನಿಯಮ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. $f\,g = f\,h$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f\,(g-h) = 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ $f = 0$ ಅಥವಾ $g = h$ ಎಂದು (4) ರಿಂದ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಬಹುಪದಿಗಳನ್ನು ಭಾಗಿಸಲೂಬಹುದು ಅಥವಾ **ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ** ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶದಲ್ಲಿ ಇದು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದರೆ ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ಪರಿಚಿತ ಉದ್ದ ಭಾಗಾಹಾರದ ಖಚಿತ ನಿರೂಪಣೆ ಮಾತ್ರವಾಗಿದೆ.

(6) $\quad g \neq 0$ ಯೊಡನೆ f ಮತ್ತು g ಗಳು ಬಹುಪದಿಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $r = 0$ ಅಥವಾ $deg\,r < deg\,g$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $f = gq + r$ ಆಗಿರುವ **ಏಕೈಕ** ಬಹುಪದಿಗಳು q ಮತ್ತು r ಗಳು, **ಇವೆ.**

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ q ಅನ್ನು **ಭಾಗಲಬ್ಧ** ಎಂದೂ r ಅನ್ನು **ಶೇಷ** ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. (9) ರ ಸಾಧನೆಯು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧವಾಗಿದೆ. ಸುಮ್ಮನೆ ಉದ್ದ ಭಾಗಾಹಾರವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತೇವೆ, ಅಂದರೆ f ಅನ್ನು g ಯಿಂದ, ಯಾವುದೇ ಶೇಷವನ್ನು ಹೊಂದಿರದೆ ಹೋಗುವವರೆಗೂ ಅಥವಾ g ಗಿಂತ ಕಡಮೆ ಸ್ತರದ ಒಂದು ಶೇಷವನ್ನು

ಹೊಂದುವವರೆಗೂ ಭಾಗಿಸುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತೇವೆ. $r_1 = 0$ ಅಥವಾ $deg\ r_1 < deg\ g$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $f = gq_1 + r_1$ ಎಂದೂ ಕೂಡ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆಗ $r_1 = r$ ಮತ್ತು $q_1 = q$ ಆಗಿರುವಂತೆ ತೋರಿಸಬೇಕು. ವ್ಯವಕಲನದಿಂದ $0 = gq + r - (gq_1 + r_1) = g(q - q_1) + r - r_1$. ಹೀಗೆ $r - r_1 = g(q_1 - q)$. $q_1 - q \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (4) ರಿಂದ $deg(r - r_1) = deg\ g + deg(q_1 - q) \geq deg\ g$ ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ r ಮತ್ತು r_1 ಗಳ ಮೇಲಿನ ನಿರ್ಬಂಧಗಳಿಂದ $r = r_1$ ಅಥವಾ $deg\ (r - r_1) < deg\ g$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. $q_1 = q$ ಮತ್ತು $r_1 = r$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದು (6) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ.

(6) ರ ಉದಾಹರಣೆಗಳಂತೆ

(7)
$$\begin{aligned} t^4 + 7t^3 - 6t &= (t^2 + 1)(t^2 + 7t - 1) + (1 - 13t), \\ t^3 + 3t^2 - 4 &= (t - 1)(t^2 + 4t + 4) + 0, \\ t^2 + 7 &= (t^4 + 7).0 + (t^2 + 7). \end{aligned}$$

ಬಹುಪದಿ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಶೇಷಪ್ರಮೇಯವು ಒಂದು ಸಹಾಯಕ ಉಪಕರಣ. ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿರಬಹುದು. ಆದರೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನೂ ಮತ್ತು ಒಂದು ಶೇಷವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$f(c) = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ c ಇದನ್ನು f ಬಹುಪದಿಯ ಒಂದು **ವಾಸ್ತವಿಕ ವರ್ಗಮೂಲ** (ಅಥವಾ **ವಾಸ್ತವಿಕ ಸೊನ್ನೆ**) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ $f(c)$ ಯು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ: $f(c) = a_0 + a_1c + a_2c^2 + \cdots + a_nc^n$ ಇಲ್ಲಿ f ಯು (1) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶವು ಶೇಷಪ್ರಮೇಯದ ಒಂದು ಪರಿಣಾಮವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಬಹಳ ಸಲ **ಅಪವರ್ತನ ಮೂಲ** ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(8) $deg\ f > 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಕೇವಲ $f = (t - c)q$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, ಅಂದರೆ, $t - c$ ಯು f ಅನ್ನು 'ಭಾಗಿಸಿದರೆ' ಮಾತ್ರ c ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$r = 0$ ಅಥವಾ $deg\ r < deg\ (t - c) = 1$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $f = (t - c)q + r$. ಎರಡೂ ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿ d ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಲ್ಲಿ,

$r = d$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ $f(c) = (c - c)q(c) + r(c) = d$. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೇವಲ $d = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, ಅಂದರೆ, ಕೇವಲ $f = (t - c)q$ ಆಗಿದ್ದ ಮಾತ್ರ $f(c) = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದೇ (8) ಆಗಿದೆ. (8) ರಿಂದ ಹೀಗೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ

(9) $deg\ f = n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ f ಯು ಗರಿಷ್ಠವೆಂದರೆ n ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

$c_1, c_2, \ldots, c_m$ ಗಳು f ನ ಮೂಲಗಳಾಗಿರಲಿ. (8) ನ್ನು m ಆವರ್ತ ಅನ್ವಯಿಸಲು $f = (t - c_1)(t - c_2)\cdots(t - c_m)g$. (4)ರಿಂದ $deg\ f = deg\ (t - c_1) + deg(t - c_2) + \cdots + deg\ (t - c_m) + deg\ g \geq m$. ಹೀಗೆ $deg\ f = n$ ಎನ್ನುವುದು $m \leq n$ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಇದು (9) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು $\leq (n-1)$ಸ್ತರದ ಎಲ್ಲ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುವ $(n-1)$ ಸ್ತರದ ಬಹುಪದಿಗಳ ಒಂದು ಸಂಗ್ರಹವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು. c_1, c_2, c_n ಗಳು n ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ, ಅಂದರೆ, $i \neq j$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $c_i \neq c_j$. ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿ

(10) $$P_i = \frac{(t - c_1)(t - c_2)\cdots(t - c_{i-1})(t - c_{i+1})\cdots(t - c_n)}{(c_i - c_1)(c_i - c_2 \cdots)(c_i - c_{i-1})(c_i - c_{i+1})\cdots(c_i - c_n)},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

ಬೇರೆ ರೀತಿ ಹೇಳಿದಲ್ಲಿ, P_i ಅನ್ನು ಎಲ್ಲ $t - c_j$ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು $t - c_i$ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದವುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆಗ P_i ಯು $(n-1)$ ಸ್ತರದ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು

(11) $P_i(c_j) = 0$ ಇದು $i \neq j$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $P_i(c_i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

f ಎನ್ನುವುದು $\leq (n-1)$ ಸ್ತರದ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $g = f - f(c_1)P_1 - f(c_2)P_2 - \cdots - f(c_n)P_n$ ಆಗಿರಲಿ. $g \neq 0$

ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $deg\ g \leq (n-1)$. ಇದರಿಂದ

$$g(c_1) = f(c_1) - f(c_1)P_1(c_1) - f(c_2)P_2(c_1) - f(c_3)P_3(c_1) - \cdots - f(c_n)P_n(c_1).$$

(11) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಲ್ಲಿ $P_1(c_1) = 1$ ಮತ್ತು $P_i(c_1) = 0$ ಇದು $i > 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ. ಹೀಗೆ $g(c_1) = 0$. ಹಾಗೆಯೇ $g(c_2) = g(c_3) = \cdots = g(c_n) = 0$. g ಬಹುಪದಿಯು n ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಮತ್ತು $g \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $deg\ g \leq (n-1)$. ಇದು (9) ಕ್ಕೆ ವಿರೋಧವಾಗಿದೆ. $g = 0$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುವುದು. ಈ ಕೆಳಗಿರುವ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 18. $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. $i = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ, (10) ವಿವರಿಸುವಂತೆ P ಇರಲಿ. $f = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಅಥವಾ $deg\ f \leq (n-1)$ ಆಗಿರುವಂತೆ f ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$f = f(c_1)P_1 + f(c_2)P_2 + \cdots + f(c_n)P_n. \tag{12}$$

P_i ಬಹುಪದಿಗಳನ್ನು $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ **ಲಾಗ್ರಾಂಜ್ ಅಂತರ್ ಧ್ರುವೀಕರಣ ಬಹುಪದಿಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. (12) ರಲ್ಲಿರುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು **ಲಾಗ್ರಾಂಜ್ ಅಂತರ್ ಧ್ರುವೀಕರಣ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಮೇಯ 18 ರಿಂದ $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ ಯು $\leq (n-1)$ ಸ್ತರದ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮಷ್ಟಿಯು n ಆಯಾಮವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ $\{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ ಯು ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ಮತ್ತು (12) ರಲ್ಲಿ f ಗೆ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

ಕೆಳಗಿರುವ 18ನೇ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಶೇಷ ಪ್ರಸಂಗವು ಭಾಗ 4 ರಲ್ಲಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

$n \geq 2$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$\begin{aligned} 1 &= P_1 + P_2 + \cdots + P_n \\ t &= c_1P_1 + c_2P_2 + \cdots + c_nP_n \\ t^2 &= c_1^2P_1 + c_2^2P_2 + \cdots + c_n^2P_n \\ &\vdots \\ t^{n-1} &= c_1^{n-1}P_1 + c_2^{n-1}P_2 + \cdots + c_n^{n-1}P_n. \end{aligned} \tag{13}$$

ಭಾಗ 1 ರಲ್ಲಿ ನೋಡಿದಂತೆ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ಕೆಳಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಈ ಮೂಲಕ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಹಾಯಕವಾಗಿವೆ.

(14) $f = t^2 + bt + c$ ಆಗಿರಲಿ, ಇಲ್ಲಿ b ಮತ್ತು c ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಕೇವಲ $b^2-4c \geq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ f ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೂಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. $b^2-4c \geq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ f ನ ಮೂಲಗಳು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

ಇದು ಸುಪರಿಚಿತವಾದ **ದ್ವಿಸಾತ್ರದ ಸೂತ್ರವಾಗಿದೆ.** ಇದರ ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯ 2, ಭಾಗ 2 ರ, ಅಭ್ಯಾಸ 10 (a) ಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. (14) ರಿಂದ t^2+1 **ವಾಸ್ತವಿಕ** ಮೂಲಗಳನ್ನು **ಹೊಂದಿಲ್ಲ** ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. **ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯ** ಎಂದು ಪರಿಚಿತವಾಗಿರುವ ಕೆಳಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ

(15) f ಎನ್ನುವುದು ≥ 1 ಸ್ತರದ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ (ಅಥವಾ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ) ಬಹುಪದಿ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ f ಒಂದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಮೂಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ; ಅಂದರೆ, $f(\alpha) = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆ α ಇದೆ.

(15) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅನುಕಲನದ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅಂಥ ಒಂದು ಸಿದ್ಧಾಂತವು ತೀರ ದಾರಿ ತಪ್ಪಿಸಿ ಕೊಂಡೊಯ್ಯುವುದರಿಂದ ಅದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಬಿಡುತ್ತೇವೆ. ಅತ್ಯಂತ ಉಪಯೋಗಿಯಾಗಿರುವ (15) ರ ರೂಪವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ

(16) f ಒಂದು ಅಶೂನ್ಯ ವಾಸ್ತವಿಕ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f = dq_1 q_2 \cdots q_r$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು q_i ಯು ಪ್ರಧಾನ ಸಹಗುಣಕ 1 ರೊಡನೆ 1 ಅಥವಾ 2 ರ ಸ್ತರದ ಒಂದು ಅಶೂನ್ಯ ವಾಸ್ತವಿಕ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು d ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

(16) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ. $deg\, f = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (16) ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧವಾಗಿದೆ. $deg\, f > 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\alpha = a + ib$ ಯು f ನ ಒಂದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಮೂಲವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $a_0 + a_1(a+ib) + a_2(a+ib)^2 + \cdots + a_n(a+ib)^n = 0$ ಆಗಿದೆ. ಗಣನೆಯಿಂದ $a_0 + a_1(a-ib) + a_2(a-ib)^2 + \cdots + c_n(a-ib)^n = 0$. ಇದರಿಂದ

(17) $f(a+ib) = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $f(a-ib) = 0$ ಮತ್ತು

(18) $(t-(a+ib))(t-(a-ib)) = t^2 - 2at + a^2 + b^2$.

ಹೀಗೆ $\alpha = a + ib$ ಯು f ನ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $b = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ $f = q_1 q_1$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $deg\, q_1 = 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ q_1 ಮತ್ತು g_1 ಗಳು ಅಶೂನ್ಯ ವಾಸ್ತವಿಕ ಬಹುಪದಿಗಳಾಗಿವೆ. (ಇಲ್ಲಿ $q_1 = t - a$). $b \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $q_1 = t^2 - 2at + a^2 + b^2$ ಆಗಿರಲು ಮತ್ತು $r = 0$ ಅಥವಾ $deg\, r < deg\, q_1$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $f = q_1 g_1 + r$ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ. $r = d$ ಅಥವಾ $r = c(t-d)$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, c ಮತ್ತು d ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ. $q_1(\alpha) = 0$ ಮತ್ತು $f(\alpha) = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $r(\alpha) = 0$ ಎಂದು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ $r = d$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $d = 0$ ಮತ್ತು $r = c(t-d)$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $r(\alpha) = c((a+ib)-d) = ca - cd + icb = 0$. a, b, c ಮತ್ತು d ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $cb = 0$ ಎಂದು, ಅಂದರೆ, $c = 0$ ಎಂದು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ಇದು $r = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. q_1 ಪ್ರಧಾನ ಸಹಗುಣಕ 1 ನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು $deg\, q_1 = 1$ ($b = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ) ಅಥವಾ $deg\, q_1 = 2$ ($b \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ,) ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $f = q_1 g_1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. $deg\, g_1 = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $d = g_1$ ಆಗಿರಲಿ. ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ನಾವು ಇದೇ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು g ಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ, q_2 ಯು ಪ್ರಧಾನ ಸಹಗುಣಕ 1 ನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಲ್ಲಿ, 1 ಅಥವಾ 2 ಸ್ತರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು q_2 ಮತ್ತು g_2 ಗಳೆರಡೂ ವಾಸ್ತವಿಕ ಬಹುಪದಿಗಳಾಗಿರುವಲ್ಲಿ $g_1 = q_2 g_2$ ಅನ್ನು ದೊರಕಿಸುತ್ತೇವೆ. $deg\, g_2 = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $d = g_2$ ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿದು ಈ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು (6) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ f ಅಪವರ್ತನಗೊಳ್ಳುವವರೆಗೂ ಅನ್ವಯಿಸಿರಿ.

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬಹುಪದಿಗಳ ಮೂಲಭೂತ ಉಪಯೋಗವು ಮುಂದಿನ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯಲ್ಲಿ ನೆಲೆಗೊಂಡಿದೆ. T ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $f=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+$ ಆಗಿರಲಿ. ನಾವು $a_0I+a_1T+a_2T^2+\cdots+a_nT^n$ ಪರಿಕರ್ಮಿಯನ್ನು (T) ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ,

$$(19)\qquad f(T)=a_0I+a_1T+a_2T^2+\cdots+a_nT^n.$$

ಇದು $a_0I+a_1T+a_2T^2+\cdots a_nT^n$ ನಂತಹ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಸಂಸ್ಕರಿಸಲು ಒಂದು ಹೊಸ ಶಕ್ತಿಶಾಲಿ ಅಂಕನವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರ $f=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಯಾವುದೇ T ಗೆ $f(T)=0$, ಶೂನ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾ $f=t$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(T)=T$. $f=1+t+t^3$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(T)=I+T+T^3$. ಈ ಅಂಕರಣದ ಗಣನೆಗೆ ನಿಯಮಗಳು ಹೀಗಿವೆ

$$(20)\qquad \begin{aligned}&\text{(a)}\ (f+g)T=f(T)+g(T),\\ &\text{(b)}\ (af)(T)=af(T),\\ &\text{(c)}\ (fg)(T)=f(T)g(T)=g(T)f(T).\end{aligned}$$

ಈ ನಿಯಮಗಳ ಸಾಧನೆಗಳು ಕೇವಲ ಮೊತ್ತ, ಅದಿಶಗುಣಕ ಮತ್ತು ಬಹು ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳು ಮತ್ತು (19) ರ ಹೊಸ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳನ್ನು ಮ ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯು ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟ ಸುತ್ತದೆ. $V=R^2$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು T ಯು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಆಗಿರಲಿ.

$$(21)\qquad T(x,y)=(2x-y,x+y)$$

$f=2+3t$ ಮತ್ತು $g=t+t^2$ ಆಗಿರಲಿ. $T^2(x,y)=T(T(x,y))=T(2x-y,x+y)=(3x-3y,3x)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು $f(T)=2I+3T$ ಮತ್ತು $g(T)=T+T^2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$(22)\qquad f(T)(x,y)=2(x,y)+3T(x,y)=(8x-3y,3x+5y),$$

$$(23)\qquad g(T)(x,y)=T(x,y)+T^2(x,y)=(5x-4y,4x+y).$$

$g=t(1+t)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $g(T)=T(I+T)$ ಎಂದೂ ಕೂಡ ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಅಂದರೆ, $g(T)(x,y)=T(I+T)(x,y)=T((x,y)+(2x-y,x+y))=T(3x-y,x+2y)=(5x-4y,4x\times y)$. ಇದು $(20c)$ ಯಿಂದ ಇರಬೇಕಾದಂತೆ (23)ಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ.

A ಯು ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $f = a_0 + a_1 t +$ $t^2 + \cdots + a_n t^n$ ಆಗಿರಲಿ. $f(A)$ ಯನ್ನು $a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots +$ A^n ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ A ಯು ಯಾವುದೇ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(A)$ ಯು ಅದೇ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಪೇಕ್ಷವಾಗಿ $f(T)$ ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. B ಯು ಇನ್ನೊಂದು ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $B = P_0^{-1} A P_0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಇರಲಿ. [ನೋಡಿ ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 6 ರ (56)]. $f(B)$ ಯು ಎರಡನೇ ಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ $f(T)$ ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $f(B) =$ $^{-1} f(A) P_0$ ಎಂದು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ, ಅಂದರೆ,

$$(24) \qquad f(P_0^{-1} A P_0) = P_0^{-1} f(A) P_0.$$

ಸೂತ್ರ (24) ನ್ನು ನೇರವಾಗಿ (19) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ತಾಳೆ ನೋಡ ಹುದು. (21) ರಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತಿರಲಿ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ಗಿರುವುದರಿಂದ A ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. ಆಗ (22) ಮತ್ತು (23) ದ

$$(25) \qquad f(A) = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad g(A) = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

(25) ರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$g(A) = A + A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

0) ರ ನಿಯಮಗಳು ಮಾತೃಕೆ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತವೆ.

T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದ್ದಾಗ $f(T)$ ಯ ಗಣನೆಯು ಅತ್ಯಂತ ಸರಳ

ವಾಗಿದೆ. Dಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ Vಗೆ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವ ಆಧಾರವು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಆಗಿರಲಿ.

$$(26) \qquad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & d_2 \ldots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 \ldots & d_n \end{bmatrix}.$$

$f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $f(D) = a_0 I$ $a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_n D^n$. ಇದರಿಂದ

$$(27) \qquad f(D) = \begin{bmatrix} f(d_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f(d_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & f(d_n) \end{bmatrix}.$$

ಇದು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ $f(T)$ ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿ

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. ಪ್ರತಿಯೊಂದು f ಮತ್ತು g ಬಹುಪದಿಗಳಿಗೆ $f = gq + r$ ಮತ್ತು $r = 0$ ಅಥವಾ $deg\ r < deg\ g$ ಆಗಿರುವಂತೆ q ಮತ್ತು r ಬಹುಪದಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (a) $f = t^5 + t^4 + t^3 - t^2 - t - 1,\ g = t^3 - 1$

   (b) $f = t^7 + 3t^6 + 5t^5 + 1,\ g = t^4 + t^2 + 1$

   (c) $f = 7t^6 + 3t^3 + 7,\ g = 6t^3 + 1$

   (d) $f = (1+i)t^2 - (\sqrt{3} + 2i)t + i,\ g = it$

   (e) $f = t^3 - 6it + (2 + 3i),\ g = it^4 - 7it^2 + (6 + 2i)$

2. $(1-t)(1 + t + t^2 + \cdots + t^n) = (1 - t^{n+1})$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

3. $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, a$ ಮತ್ತು b ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, $a_0 + a_1(a + ib) + a_2(a + ib)^2 + \cdots + a_n(a + ib)^n = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $a_0 + a_1(a - ib) + a_2(a - ib)^2 + \cdots + a_n(a - ib)^n = 0$ ಎಂದು ತಾಳೆ ನೋಡಿ. [**ಸೂಚನೆ** : $\alpha =$

$x+iy$ ಆಗಿದ್ದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, $x-iy$ ಅನ್ನು $\bar{\alpha}$ ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಿ. $\overline{(\alpha+\beta)}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$, $\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\bar{\beta}$ ಎಂದು ಮತ್ತು ಕೇವಲ $\bar{\alpha}=\alpha$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ αವು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಾಳೆ ನೋಡಿ. ಇದನ್ನು $a_0+a_1(a+ib)+a_2(a+ib)^2+\cdots+a_n(a+ib)^n$ ಅನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

4. f ಯು ಒಂದು ಬೆಸ್ತ ಸ್ತರದ ವಾಸ್ತವಿಕ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(c)=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ**: f ನ ಪ್ರಧಾನ ಸಹಗುಣಕ >0 ಆಗಿದ್ದರೆ, $lim_{a\to\infty} f(a)=\infty$ ಮತ್ತು $lim_{a\to-\infty} f(a)=-\infty$ ಎಂದು ಎಲ್ ಹೋಪಿಟಲ್‌ನ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತೋರಿಸಿರಿ. ನಂತರ ಇಚ್ಛಿತ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಮಧ್ಯಮ ಮೌಲ್ಯ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

5. f ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು c ಯು f ನ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೂಲವಾಗಿರಲಿ. c ಯು f ನ ಒಂದು ಪುನರ್ ಪ್ರತಿಪಾದಿತ ಮೂಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ; ಅಂದರೆ, ಕೇವಲ $(df/dt)(c)=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಯಾವುದೋ $k>1$ ಗೆ $(t-c)^k$ಯು f ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

6. (a) 1, 2, 3, 4, 5 ಕ್ಕೆ ಲಾಗ್ರಾಂಜೆ ಅಂತರ್‌ಧ್ರುವೀಕರಣ ಬಹುಪದಿಗಳನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

(b) $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ಗಳು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(c_i)=b_i$ ಮತ್ತು $deg\, f\leq(n-1)$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಖಚಿತವಾಗಿ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಬಹುಪದಿ f ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ**: $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ಗಳಿಗೆ f ಅನ್ನು ಲಾಗ್ರಾಂಜೆ ಅಂತರ್‌ಧ್ರುವೀಕರಣ ಬಹುಪದಿಗಳ ಪದಗಳ ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.]

(c) $f(1)=0$, $f(2)=3$, $f(3)=-1$, $f(4)=2$, $f(5)=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ≤ 4 ರ ಸ್ತರದ ಒಂದು ಬಹುಪದಿ

f ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯು

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2 \\ \vdots & & & \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : (13) ನ್ನು ಮತ್ತು $\{1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}\}$ ಯು $\leq (n-1)$ಸ್ತರದ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

8. T ಯು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ R^3 ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಆಗಿರಲಿ.

$$T(x, y, z) = (3x-y,\ 2x+7y+z, x+z).$$

$f = 2t^2 + 7t - 1$ ಆಗಿರಲಿ; $g = t - (-7 + \sqrt{41})/4$, $h = t - (-7 - \sqrt{41})/4$ $k = 3t^3 + 6t$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $f(T)$ (b) $g(T)h(T)$ (c) $(f(T))^2$

(d) $k(T)$ (e) $(3f + 7k)(T)$

9. $f(t) = 6t^4 + t^3 + 6t + 1$, $g = 3t^2 + 1$, $q = 2t^2 + t/3 - \frac{2}{3}$, $r = (17t + 5)/3$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ A ಯ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ $f(A)$, $g(A)$, $q(A)$, $r(A)$ ಮತ್ತು $(gq + r)(A)$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, A ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ (d) $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0 & 0\\-1 & 3 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

10.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ ಆಗಿರಲಿ.

ಮತ್ತು $f=t^{16}+7t^2+1$ ಆಗಿರಲಿ. $f(A)$ ಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

11.

$$A=\begin{bmatrix}B & 0\\0 & C\end{bmatrix}$$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

B ಯು $n\times n$, cಯು $k\times k$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು 0ಯು ತಕ್ಕ ಗಾತ್ರದ ಒಂದು ಸೊನ್ನೆ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ, ಆಗ

$$f(A)=\begin{bmatrix}f(B) & 0\\0 & f(c)\end{bmatrix}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

12. V ಯು ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು f ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(T)^*=f(T)^*$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

13. (a) $(20c)$ ಯ ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(b) (24) ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಾಳೆ ನೋಡಿರಿ [**ಸೂಚನೆ**: $(P_0^{-1}AP_0)^k=P_0^{-1}A^kP_0$, ಇದು ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $k\geq 1$ ಗೆ, ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

ವಿಶೇಷ ಅಭ್ಯಾಸ

ಈ ಅಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಬಹುಪದಿಗಳೂ **ಪರಿಮೇಯ** ಬಹುಪದಿಗಳಾಗಿದು ತ್ತವೆ; ಅಂದರೆ, $q\neq 0$ ಆಗಿರುವುದರೊಂದಿಗೆ p ಮತ್ತು q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾ

ಗಿರುವಲ್ಲಿ, ಸಹಗುಣಾಕಗಳು p/q ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯು, ಅವರ ಪ್ರಧಾನ ಸಹಗುಣಕವು 1 ಆಗಿದ್ದರೆ, **ಏಕತತ್ವಿ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ಬಹುಪದಿ f, g ಮತ್ತು q ಗಳು ಧನಾತ್ಮಕ ಸ್ತರದ ಬಹುಪದಿಗಳಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, ನಾವು $f = gq$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಲ್ಲೆವಾದರೆ, ಅದನ್ನು **ಸಂಕುಚನಸಯೋಗ್ಯ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. f ಯು ಸಂಕುಚನಯೋಗ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಆಗ f ಅನ್ನು **ಸಂಕುಚಿಸಲು ಅಸಮರ್ಥ** ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದು. f ಏಕತತ್ವಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಸಂಕುಚಿಸಲ ಯೋಗ್ಯ ಮತ್ತು $deg\, f \geq 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, f ಪ್ರಧಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

$deg\, f \geq 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ f ಒಂದು **ಏಕತತ್ವಿ** ಬಹುಪದಿ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $i \neq j$ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು q_i ಯು ಒಂದು ಪ್ರಧಾನ ಆಗಿದ್ದರೆ, $q_i \neq q_j$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $f = p_1 p_2 \cdots p_k$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇಷ್ಟಲ್ಲದೆ, $p_i \neq p_j$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $i \neq j$ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು p_i ಯು ಒಂದು ಪ್ರಧಾನ ಆಗಿದ್ದು, $f = p_1 p_2 \cdots p_k$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $k = r$ ಎಂದು ಮತ್ತು ನಾವು $q_i = p_i$ ಆಗುವಂತೆ p_i ಯನ್ನು ಪುನರ್ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : f ಗೆ ಅಂಥ ಒಂದು ನಿರೂಪಣೆಯ ಅಸ್ತಿತ್ವವು ಸುಲಭ. ಏಕೈಕತೆಯನ್ನು ತೋರಿಸಲು ಮೊದಲು, p ಯು ಒಂದು ಪ್ರಧಾನ ಆಗಿದ್ದು ಮತ್ತು p ಯು gh ಅನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಆಗ p ಯು g ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಅಥವಾ p ಯು h ಅನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು, p ಯು g ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸದಿದ್ದರೆ, ಆಗ $1 = pg_1 + gg_2$ ಆಗಿರುವಂತೆ g_1 ಮತ್ತು g_2 ಬಹುಪದಿಗಳಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು g_1 ಮತ್ತು g_2 ಗಳು ನಿರಂಕುಶವಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, $pg_1 + gg_2$ ರೂಪದ ಬಹುಪದಿಗಳಲ್ಲಿ r ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಸ್ತರದ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ p ಯನ್ನು r ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

ಭಾಗ 3. ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಗಳು

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಗೆ ಆಪ್ತ ಸಂಬಂಧಿಯಾದ ಎರಡು ಬಹುಪದಿಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದು **ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿ.** V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\triangle(t) = det(tI - T)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $\triangle$ ವು V ಯ ಆಯಾಮಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸ್ತರದ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದೆ. (ನೋಡಿ ಅಧ್ಯಾಯ 2, ಭಾಗ 6 ರ ಅಭ್ಯಾಸ 16) $\triangle$ ವನ್ನು T ಯ **ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. [ನೋಡಿ ಭಾಗ 1, ಇಲ್ಲಿ (16d) ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸಮೀಕರಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ

ಸಮೀಕರಣ $\triangle(c)=0$ ಆಗಿದೆ.] ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿಗಳ ಮೂಲಗಳೆಂದರೆ, T ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳೇ ಆಗಿವೆ. A ಯು ಒಂದು $n\times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $\triangle(t)=det(tI-A)$ ಯನ್ನು A ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$\triangle$ ಅನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡುವುದಕ್ಕಾಗಿ V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು. A ಯು ಈ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿಲಿ. ಆಗ $tI-T$ ಯ ಮಾತೃಕೆಯು $tI-A$ ಯೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$(1) \qquad \triangle=det\,(tI-A).$$

ಸೂತ್ರ (1), ಆಧಾರದ ಆಯ್ಕೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿಲ್ಲ. ಇದು B ಯು ಒಂದು ದ್ವಿತೀಯ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $tI-B$ ಯು ಈ ದ್ವಿತೀಯ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ $tI-T$ ಯು ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು t ಗೂ $det\,(tI-T)$ ಯು ಆಧಾರದ ಆಯ್ಕೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಹೀಗೆ $det\,(tI-A)=det\,(tI-B)$ ಎಂದು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. $B=P_0^{-1}AP^0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೆಳಗಿರುವ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು ಈ ಸಂಗತಿಗೆ ಒಂದು ಪರ್ಯಾಯ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ :

$$\begin{aligned} det\,(tI-B) &= det\,(tP_0^{-1}P_0-P_0^{-1}AP_0)=det\,(P_0^{-1}(tI-A)P_0) \\ &= det\,(P_0^{-1})\,det\,(tI-A)\,det(P_0)=det\,(tI-A). \end{aligned}$$

ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿಯು T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆಯೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ನಮಗೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಸಾಕಷ್ಟು ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕೊಡುವುದಿಲ್ಲ. [ಭಾಗ 1 ರ (21) ff ಮತ್ತು (22) ನೋಡಿ.] ನಾವು $\triangle$ ಗೆ ಆಪ್ತ ಸಂಬಂಧಿಯಾದ, T ಯ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯತೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ನಮ್ಮನ್ನು ಶಕ್ತರನ್ನಾಗಿಸುವ ಒಂದು ದ್ವಿತೀಯ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಕೆಳಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶವು ನಮ್ಮ ಉದ್ದೇಶಗಳಿಗೆ ಕೇಂದ್ರೀಯವಾಗಿಲ್ಲದ್ದರೂ, ಈ ದ್ವಿತೀಯ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ನಮಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ :

$$(2) \qquad \triangle(T)=0.$$

ಇದನ್ನು **ಕಾಯಲಿ - ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯ** ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. (2) ರ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ 0 ಎಂದರೆ ಸೊನ್ನೆ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಎಂದು ಅರ್ಥ. $dim\ V=2$ ಆಗಿರುವ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ (2)ನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗುವುದು ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಬಿಡಲಾಗುವುದು. $dim\ V=2$ ಎಂದು ಇಟ್ಟು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\text{ಯು}$$

ಯಾವುದಾದರೂ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿರುವಂತೆ T ಯ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿರಲಿ. Bಯು $t\,I-A$ ಯ ಅಭಿಜಾತ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ ಆಗಿರಲಿ. (ನೋಡಿ ಅಧ್ಯಾಯ 2, ಭಾಗ 6) ಆಗ

(3) $$B=\begin{bmatrix} t-a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & t-a_{11} \end{bmatrix}=t\,I-\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{22} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

ಮತ್ತು [ನೋಡಿ ಅಧ್ಯಾಯ 2, ಭಾಗ 6 ರ (28).]

(4) $$\triangle(t)\ I=(tI-A)B.$$

$t^2I-A^2=(tI-A)(tI+A)$ ಮತ್ತು $\triangle(t)=t^2-(a_{11}+a_{22})t+a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$, ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\triangle(t)I-\triangle(A)=(t^2I-(a_{11}+a_{22})tI+(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})I)-(A^2-(a_{11}+{}_{22})A+(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})I)=(t^2I-A^2)-(a_{11}+a_{22})(t\ I-A)=(tI-A)(tI+A-(a_{11}+a_{22})I)$. ಇದರಿಂದಾಗಿ

(5) $$\triangle(t)I=\triangle(A)+(tI-A)(tI+A-(a_{11}+a_{22})I).$$

(4) ಮತ್ತು (5) ನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಿ ಮತ್ತು $\triangle\ (A)$ ಬಿಡಿಸಿ :

(6) $$\triangle(A)=(tI-A)\ C,\ \text{ಇಲ್ಲಿ}\ C=B-tI-A+(a_{11}+a_{22})\ I.$$

(3) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $C=0$ ಎಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಇದು (2) ನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಬಹುಪದಿ P ಯು, ಅದರ ಪ್ರಧಾನ ಸಹಗುಣಕವು 1 ಆಗಿದ್ದರೆ, **ಏಕತತ್ವ** ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\triangle$ ವು ಆಗಿದೆ. ಅವಶ್ಯವಿರುವ ದ್ವಿತೀಯ ಬಹುಪದಿಯು ಮುಂದೆ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 19. V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಏಕತತ್ವಿ ಬಹುಪದಿ Pಯು ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಧರ್ಮಗಳೊಡನೆ ಇರುತ್ತದೆ,

(7) (a) $p(T) = 0$
(b) $g(T) = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, p ಯು g ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಇಷ್ಟಲ್ಲದೆ, $1 \leq deg\ p \geq dim\ V$. p ಬಹುಪದಿಯನ್ನು T ಯ **ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ. $g(T) = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ, ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಸ್ತರದ ಬಹುಪದಿ g ಇದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\triangle$ ವು ಅಂಥ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದೆ. pಯು, $p(T) = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತು $g(T) = 0$ ಆಗಿರುವಂತಿರುವ ಧನಾತ್ಮಕ ಸ್ತರದ g ಏಕತತ್ವಿ ಬಹುಪದಿಗಳಲ್ಲಿ p ಯು ಅತ್ಯಂತ ಕಡಮೆಯ ಸ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಸ್ತರದ ಏಕತತ್ವಿ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಯ್ಕೆಯಿಂದ, p ಯು $(7a)$ ಯನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. p ಯು $(7b)$ ಯನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದೂ ಮತ್ತು $(7a)$ ಮತ್ತು $(7b)$ಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ ಏಕಮಾತ್ರ ಏಕತತ್ವಿ ಬಹುಪದಿಯು p ಆಗಿದೆ ಎಂದೂ ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು.

g ಯು, $g(T) = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ. $g = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ p ಯು ಖಂಡಿತವಾಗಿ g ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. $g \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $r = 0$ ಅಥವಾ $deg\ r < deg\ p$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $g = pq + r$ ಆಗಿರಲಿ. $g(T) = 0$ ಮತ್ತು $p(T) = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$0 = g(T) = p(T)q(T) + r(T) = r(T).$$

$r \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಯಾವುದೋ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ $c \neq 0$ಗೆ cr ಯು ಏಕತತ್ವಿ ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ $deg\ (cr) = deg\ r < deg\ p$ ಮತ್ತು $cr(T) = c(T(T)) = 0$. ಇದು p ಯ ಆಯ್ಕೆಗೆ ವಿರೋಧವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ $cr = 0$, $r = 0$ ಮತ್ತು p ಯು g ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು p ಯು $(7b)$ ಯನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

(7)ನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ ಮತ್ತೊಂದು ಏಕತತ್ವಿ ಬಹುಪದಿ p_1 ಆಗಿರಲಿ. p_1 ಏಕತತ್ವಿ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $p_1 \neq 0$. $p(T) = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ p_1 ಯು p

ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ; ಎಂದರೆ, $p=p_1q$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಹೀಗೆ $deg\ p = deg\ p_1 + deg\ q$. ಹೀಗೆ $p_1 \leq deg\ p$. p ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದಿಂದ $deg\ p_1 = deg\ p$ ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ $deg\ q=0$. p ಮತ್ತು p_1ಗಳೆರಡೂ ಏಕತಕ್ತಿಗಳು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $q=1$. ಇದು $p=p_1$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

p ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವು $deg \geq 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. $\triangle(T)=0$ ಮತ್ತು p ಯು $\triangle$ ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ, $deg\ p \leq deg\ \triangle = dim\ V$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ p ಯ ಗಣನೆಯು ಬಹಳ ಸುಲಭವಲ್ಲ. ನಿಮ್ಮ ಆಯಾಮದ ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗವಾಗುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಕೆಲವು ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿಗೆ, p ಯ ರಚನೆಯು ಸರಳವಾಗಿದೆ. $T=I$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ p ಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ $t-1$ ಆಗಿದೆ. ಯಾವುದಾದರೂ $k>0$ಗೆ $T^k=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $g=t^k$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $g(T)=0$. $(7b)$ ಯಿಂದ ನಾವು p ಯು gಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಹೀಗೆ $1 \leq r \leq k$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $p=t^r$. $T=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ p ಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ t ಆಗಿದೆ. ಕೆಳಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶವು p ಯ ಬಗ್ಗೆ ಇನ್ನಷ್ಟು ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಒದಗಿಸುತ್ತದೆ.

(8) p ಯು T ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಕೇವಲ $p(c)=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ c ಯು T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ.

$p(c)=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $t-c$ ಯು p ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. p ಯು $\triangle$ ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ, ನಾವು $t-c$ ಯು $\triangle$ ವನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಹೀಗೆ $\triangle(c)=0$; ಅಂದರೆ, c ಯು T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ, c ಯು T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $p=(t-c)g+r$, ಇಲ್ಲಿ $r=0$ ಅಥವಾ $deg\ r<deg(t-c)=1$. ಆಗ d ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, $r=d$.

$0=p(T)=(T-cI)g(T)+dI$. ಇದರಿಂದ $(T-cI)g(T)=-dI$. $d\neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $g(T)/-d$ ಯು $T-cI$ಗೆ ವಿಲೋಮವಾಗಿದೆ. c ಯು T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $cI-T$ ಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $T-cI$ ಯು

ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಆಗಿಲ್ಲದೆ ಇರುವುದರಿಂದ, $d=0$. ಇದು $p(c)=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು (8) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಕೆಳಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶವು p ಯನ್ನು ಗಣಿಸುವಲ್ಲಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ.

(9) $deg\ q = 2$ ಆಗಿರುವಂತೆ, q ವು $\triangle$ ವನ್ನು ಭಾಗಿಸುವಂತೆ ಮತ್ತು q ಯ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರದಂತೆ q ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ p ಯನ್ನು q ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

(9) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು $\triangle$ ದ ಸಮ್ಮಿಶ್ರಮೂಲಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಸುವುದರಿಂದ ಕೊಡಬಹುದು. ಆದರೆ ಇದರಿಂದ ನೇರ ಮಾರ್ಗ ದೊರೆಯದ್ದರಿಂದ ಇದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೈಬಿಡಲಾಗುವುದು. (8) ಮತ್ತು (9) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ p ಯನ್ನು ಗಣಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. ಮೊದಲು

(10) $\triangle = q_1^{k1} q_2^{k2} \cdots q_l^{kl}$,

ಇದು $\triangle$ ಅಪವರ್ತನೆ

ಇಲ್ಲಿ $i \neq j$, $k_i \geq 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $q_i \neq q_j$ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು q_i ಯೂ ಸ್ತರ 1 ರ ಅಥವಾ ಸ್ತರ 2 ರ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಏಕತತ್ವ ಬಹುಪದಿ ಆಗಿದೆ. $deg\ q_i = 2$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ q_i ಯು ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

(8) ಮತ್ತು (9) ರಿಂದ

(11) $p = q_1^{s1} q_2^{s2} \cdots q_l^{sl}$,

ಇಲ್ಲಿ $i = 1, 2, \ldots, l$ ಗೆ $1 \leq s_i \leq k_i$.

ಈಗ $g(T)=0$ ಆಗಿದೆಯೋ ಎಂದು ನೋಡಲು $g = q_1^{t1} q_2^{t2} \cdots q_l^{tl}$ ರೂಪದ ಬಹುಪದಿಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು $i = 1,2,\ldots,l$ ಗೆ $1 \leq t_i \leq k_i$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $g(T)=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ $t_1, t_2, \ldots, t_l$ ಗಳ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಇದು p ಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

A ಯು ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ A ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯು $g(A)=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ, ಏಕತತ್ವ ಬಹುಪದಿ g ಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಕಡಮೆ ಸ್ತರದ

ಏಕತತ್ವ ಬಹುಪದಿ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ A ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, (A ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯು T ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ವಿಶದೀಕರಿಸುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು p ಗಳು ಪರಿಶೀಲನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಮತ್ತು ಕನಿ ಬಹುಪದಿಗಳನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸಲಿ.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ ಎಂದಿದ್ದರೆ,}$$

ಆಗ $\triangle = (t-2)(t-4)$ ಆಗುವುದರಿಂದ, (8) ರಿಂದ $p = (t-2)(t-4)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ ಆಗಿರಲಿ.}$$

ಆಗ $\triangle = (t-1)(t-2)$ ಆಗುವುದರಿಂದ, ಮತ್ತೆ (8) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ $p = (t-1)(t-2)$. ಮತ್ತು

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ಇರಲಿ.}$$

ಆಗ $\triangle = t^2+1$ ಆಗುವುದರಿಂದ, (9) ರಿಂದ, $p = t^2+1$. ಮತ್ತು

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ಎಂದಿರಲಿ}$$

ಆಗ $\triangle = (t-1)^2$. ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ $p = t-1$ ಅಥವಾ $p = (t-1)^2$ $A \neq I$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $A-1 \neq 0$, ಅಂದರೆ, $p \neq t-1$. ಹೀಗೆ $p = (t-1)^2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ಎಂದಿರಲಿ}$$

ಆಗ $\triangle = t^2(t^2+1)$. ಹೀಗೆ $p = t(t^2+1)$ ಅಥವಾ $p = t^2(t^2+1)$

ಗಣನೆಯು $A(A^2+I)\neq 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ $p=t^2(t^2+1)$.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$ ಎಂದಿರಲಿ

ಆಗ $\triangle=(t-3)^3(t-1)$. ಹೀಗೆ $p=(t-3)(t-1)$, ಅಥವಾ $p=(t-3)^2(t-1)$ ಅಥವಾ $p=(t-3)^3(t-1)$. ಗಣನೆಯು $(A-3I)(A-I)\neq 0$ ಎಂದೂ ಮತ್ತು $(A-3I)^2(A-I)=0$ ಎಂದೂ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $p=(t-3)^2(t-1)$.

T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿರುವಾಗ p ಯ ಗಣನೆಯೂ ತುಂಬ ಸುಲಭ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಈ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ D ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. D ಯು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಂದರೆ,

(12) $$D=\begin{bmatrix}d_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & d_2 & \ldots & 0\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & d_n\end{bmatrix}$$

ಆಗ $\triangle=(t-d_1)(t-d_2)\cdots(t-d_n)$. $d_1=d_2=\cdots=d_{r1}=c_1$, $d_{(r1+1)}=d_{(r1+2)}=\cdots=c_2, \ldots,\ d_{(rk-1+1)}=d_{(rk-1+2)}=\cdots=d_n=c_k$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತು $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿರುವಂತೆ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಕ್ರಮವು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ

(13) $p=(t-c_1)(t-c_2)\cdots(t-c_k)$ಯು T ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದೆ.

c ಯು T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $\triangle(c)=0$. ಯಾವುದಾದರೊಂದು i ಗೆ $c=d_i$ ಅಥವಾ ಯಾವುದಾದರೊಂದು j ಗೆ $c=c_j$.

A ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ, $\triangle_1$ ವು B ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\triangle_2$ ವು C ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ. p ಯು A ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ, p_1 ಯು B ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು p_2 ಯು C ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

(a) $\triangle = \triangle_1 \triangle_2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) p ಯು $p_1\, p_2$ ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(c) pಯು $p_1 p_2$ಗೆ ಸಮವಾಗಿರದೆ ಇರಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಲು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿರಿ.

6. (a) ಯಾವುದಾದರೊಂದು $k \geq 1$ ಗೆ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $T^k = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $T = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : T ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು (18)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(b) $T^k = 0$ ಮತ್ತು $dim\ V = n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $T^n = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

7. V ಯು ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವಿಕ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. f ಯು nನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು g ಯು w ನಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾಗಲೆಲ್ಲ fg ಯು w ನಲ್ಲಿರುವಂತೆ w ಯು V ಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. ಕೇವಲ p ಯು h ಅನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಮಾತ್ರ wನಲ್ಲಿ h ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಏಕತತ್ತ್ವ ಬಹುಪದಿ p ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : p ಯು wನಲ್ಲಿರುವ ಕನಿಷ್ಠಸ್ತರದ ಒಂದು ಏಕತತ್ತ್ವ ಬಹುಪದಿ ಆಗಿರಲಿ. ಪ್ರಮೇಯ 19 ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ, ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯದ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿದ ಉಪಯೋಗವು ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಕೊಡುವುದು.]

8. ಕೆಳಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

9. (a) A ಯು 3×3 ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ:

$$\triangle = t^3 - (A_{11} + A_{22} + A_{33})t^2 + \left(det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{22} & B_{22} \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}\right)t - det\,(A)$$

(b) A ಯು $n \times n$ ಆಗಿರಲಿ. $\triangle = t^n + a_{n-2}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ ಯು A ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ. ಕೇವಲ $a_0 \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. A ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಿರಲು $A^{-1} = (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2 A + a_1 I)/- a_0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ**: ಕೇವಲ 0 ಯು $\triangle$ ದ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿ ಇಲ್ಲದ್ದಿದರೆ ಮಾತ್ರ A ಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. ಈ ಪರಿಣಾಮವನ್ನು ಗಣಕ ಯಂತ್ರಗಳ ಮೇಲೆ ಅನೇಕ ಸಲ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.]

(c) A ಮತ್ತು $\triangle$ ಗಳು (b) ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇದ್ದರೆ, $a_{n-1} = -(A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn})$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ**: ಅಧ್ಯಾಯ 2 ರ ಭಾಗ 6 ರ ಅಭ್ಯಾಸ 13 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

10. A ಯು ಊರ್ಧ್ವ ತ್ರಿಕೋಣೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $\triangle = (t-A_{11})(t-A_{22})\cdots(t-A_{nn})$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

11. (2) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆ A ಯು $n \times n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $q(A) = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ $\leq n^2$ ಸ್ತರದ ಒಂದು ಬಹುಪದಿ q ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[**ಸೂಚನೆ** : $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ, $\{I, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$ ಯು ನಿರವಲಂಬಿತವಾಗಿರಬಲ್ಲದೇ ?]

12. ಒಂದು 3×3 ಮಾತೃಕೆಯು ವ್ಯಸ್ತವನ್ನು, ಅಭ್ಯಾಸ 9(b)ಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗಣಿಸಲು ಒಂದು ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ವಿಶೇಷ ಅಭ್ಯಾಸ

(2)ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : f ಮಾತೃಕೆ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ; ಅಂದರೆ, $f = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_k t^k$, ಇಲ್ಲಿ $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$ ಗಳು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ. $A_k \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, A_k ಯು f ನ ಪ್ರಧಾನ ಸಹಗುಣಕ ಆಗಿದೆ ಎಂದೂ ಮತ್ತು $\deg f = k$ ಎಂದೂ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. $\deg f = k$ ಮತ್ತು $\deg g = l$ ಇಲ್ಲಿ f ನ ಪ್ರಧಾನ ಸಹಗುಣಕವು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ, ಆಗ $\deg (fg) = \deg f + \deg g$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. A ಯು $n \times n$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\triangle$ ವು A ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ. B ಯು $tI - A$ ಯ ಅಭಿಜಾತ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ ಆಗಿರಲಿ. B ಯು $\leq (n-1)$ ಸ್ತರದ ಮಾತೃಕೆ ಸಹಗುಣಕಗಳೊಡನೆ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಆಗ $\triangle(t) I = (tI - A) B$ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ $k \geq 1$ ಗೆ, $t^k I - A^k = (tI - A)(t^{k-1} I + t^{k-2} A + \cdots + tA^{k-2} + A^{k-1})$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. ಇದು (6) ರಂತಿರುವ, ಎಂದರೆ, $\triangle(A) = (tI - A)\ C$ ಯಂತಹ ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. $C \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಬಲಭಾಗವು ಮಾತೃಕೆ ಸಹಗುಣಕ ಹೊಂದಿದ t ಯಾಗಿದ್ದು ಧನ ಸ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ t ಯ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರುವಾಗ ಎಡಭಾಗವು ಸೊನ್ನೆ ಅಥವಾ 0 ಸ್ತರದ ಮಾತೃಕೆ ಸಹಗುಣಕ ಹೊಂದಿದ t ಯ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದೆ.]

ಭಾಗ 4. ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು : II

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯ ಮೇಲಿನ ಸರಳನಿರ್ಬಂಧದ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು. ಈ ವಿವರಣೆಯಿಂದ ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ಮಾತೃಕೆಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಸರಳತಮ ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸದಿಶವನ್ನೂ x, y ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಅಂದರೆ, $E(x, y, z) = E(x, y, 0)$ ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿ ಲಂಬವಾಗಿ ಪ್ರಲಂಬಿಸುವ R^3 ಮೇಲಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು E ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ E ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E ಯ ಕೆಳಗಿರುವ ಈ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು, ಜ್ಯಾಮಿತಿಕವಾಗಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ತಾಳೆಯಾಗುತ್ತವೆ:

(a) $E^2 = E$.

(b) E ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ.

(1) (c) $EX = X$ ಆಗಿರುವಂತೆ, E ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಂದ ಆಗಿದೆ.

(d) E ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯು $I - E$ ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಂದ ಆಗಿದೆ.

$(1b)$ ಗುಣಧರ್ಮವು ಮೇಲಿರುವ E ಯ ಮಾತೃಕೆ ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ, $(1c)$ ಯು ಜ್ಯಾಮಿತಿಕವಾಗಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $(1d)$ ಯು $(I - E)(x, y, z) = (0, 0, z)$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯಿಂಧ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. $(1b, c, d)$ ಗಳು $(1a)$ ಯ ಪರಿಣಾಮಗಳಾಗಿವೆ.

$E^2 = E$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು E ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ E ಯನ್ನು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. X ಯು E ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿರಲಿ. ಆಗ ಯಾವುದೋ Y ಗೆ $X = EY$. E ಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿರಿ ಮತ್ತು $E^2 = E$ ಅನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. ಹೀಗೆ $EX = E^2Y = EY = X$, ಎಂದರೆ, $EX = X$. ವಿಲೋಮವಾಗಿ $EX = X$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ X ಯು ಖಚಿತವಾಗಿ E ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿದೆ.

ಇದು ಈ ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ:

(2) $E^2 = E$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $EX = X$ ಆಗಿರುವಂತೆ, E ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಎಲ್ಲ X ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದೆ.

$E^2 = E$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(I-E)^2 = I - 2E + E^2 = I - 2E + E$ $= I - E$.

(3) E ಯು ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $I - E$ ಯು ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದೆ.

(2) ರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ:

(4) E ಯು ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(I-E)X = X$ ಆಗಿರುವಂತೆ. $I - E$ ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಎಲ್ಲ X ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿದೆ.

$(I-E)X = X$ ಸಮೀಕರಣವೂ $EX = 0$ ಯೂ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ. ಹೀಗೆ (4) ರಿಂದ

(5) E ಯು ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ E ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯು $I - E$ ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

X ಯು V ಯಲ್ಲಿರಲಿ. ಆಗ $X = EX + X - EX = EX + (I-E)X$, ಆಗುವುದರಿಂದ, E ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶದ ಮತ್ತು $I - E$ ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸದಿಶದ ಮೊತ್ತವು X ಆಗಿದೆ. Y ಯು E ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು Z ಯು $I - E$ ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವಲ್ಲಿ, $X = Y + Z$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ (2) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ $X = EY$ ಮತ್ತು $Z = (I-E)Z$. ಹೀಗೆ $X = EY + (I-E)Z$. E ಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ $EX = E^2Y + E(I-E)Z = EY + EZ - E^2Z = EY + EZ - EZ = EY = Y$. ಹಾಗೆಯೇ $Z = (I-E)X$. ಇದು ಈ ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ:

(6) E ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ Y ಯು E ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು Z ಯು $I - E$ ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವ, V ಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು X ಸದಿಶವೂ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಬೀಜೋಕ್ತಿ $X = Y + Z$ ಅನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇಷ್ಟಲ್ಲದೆ, $Y = EX$ ಮತ್ತು $Z = (I-E)X$.

ಈಗ $D_1 = \{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು E ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $D_2 = \{X^{k+1}, X^{k+2}, \ldots, X^n\}$ ಯು $I - E$ ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. (6) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ, $X = Y + Z$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

ಆಗ Y ಯು D_1ನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಮತ್ತು Z ಯು D_2ನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಹೀಗೆ X ಯು $\{X^1, X^2, \ldots, X^k, X^{k+1}, X^{k+2}, \ldots, X^n\}$ ನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ನಾವು $\{X^1, X^2, \ldots, X^k, X^{k+1}, X^{k+2}, \ldots, X^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. $T = c_1E+c_2(I-E)$. ಆಗ $TX^i = c_1EX^i+c_2(I-E)X^i$. X^iಯು E ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, (2) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $X^i = EX^i$. ಹೀಗೆ $(I-E)X^i = (I-E)EX^i = (E-E^2)X^i = (E-E)X^i = 0$. ಹೀಗೆ $TX^i = c_1X^i$. ಹಾಗೆಯೇ $1 \leq i \leq k$ ಗೆ $TX^i = c_1X^i$ ಮತ್ತು $(k+1) \leq i \leq n$ ಗೆ $TX^i = c_2X^i$. $\{X^1, X^2, \ldots, X^k, X^{k+1}, X^{k+2}, \ldots, X^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ:

(7) E ಯು ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $T=c_1E+c_2(I-E)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ.

$c_1 = 1$ ಮತ್ತು $c_2 = 0$ ಆಗಿರುವ ಪ್ರಸಂಗವು ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ:

(8) E ಯು ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ E ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ.

$(1b, c, d)$ ಗಳು $(1a)$ ಯ ಪರಿಣಾಮಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರಲಂಬನಗಳ ಬಗೆಗೆ ಮತ್ತಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚು ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ದೊರಕಿಸಲಾಗಿದೆ. (7) ರ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ,

ಪ್ರಮೇಯ 20. V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರಲಿ. T ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. $E_1, E_2, \ldots, E_r$ ಗಳು ಕೆಳಗಿರುವ ಗುಣಧರ್ಮಗಳೊಡನೆ V ಯ ಮೇಲಿನ ಅಶೂನ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳಾಗಿರಲಿ.

(a) $I = E_1 + E_2 + \cdots + E_r$.

(9) (b) $E_iE_j = 0$, ಇದು $i \neq j$ ಆಗಿದ್ದರೆ

(c) $T = c_1E_1 + c_2E_2 + \cdots + c_rE_r$.

ಆಗ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ. X ಯು E_1 ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿರಲಿ. ಆಗ (2) ರಿಂದ, $X = E_1X$. $i>1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $E_iX = E_iE_1X = 0$, ($9b$) ಯ ಕಾರಣದಿಂದ. T ಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ ಮತ್ತು ($9c$) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. ಆಗ $TX = c_1 E_1X + c_2E_2X + \cdots + E_rX$. $E_1X = X$ ಮತ್ತು $i>1$ ಗೆ $E_iX = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $TX = c_1X$. ಹಾಗೆಯೇ, X ಯು E_i ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ $i = 2, 3, \ldots, r$ ಗೆ, $TX = c_iX$. ಹೀಗೆ :

(10) X ಯು E_i ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಅಶೂನ್ಯ ಸದಿಶವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $i = 1, 2, \ldots, r$ ಗೆ X ಯು c_i ಗೆ ಸೇರಿರುವ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶವಾಗಿದೆ.

X ಯು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $X = E_1X + E_2X + \cdots + E_rX$. ಇಷ್ಟಲ್ಲದೆ, $i = 1, 2, \ldots, r$ ಗೆ E_iX ಯು E_i ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿದೆ. ಎಂದು ($9a$) ದಿಂದ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. X ಗೆ ಈ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $i = 1, 2, \ldots, r$ ಗೆ Y^i ಯು E_i ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವಲ್ಲಿ, $X = Y^1 + Y^2 + \cdots + Y^r$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ (2) ರಿಂದ $1 \leq i \leq r$ ಗೆ $Y^i = E_iY^i$ ಆದ್ದರಿಂದ $E_1X = E_1Y^1 + E_1Y^2 + \cdots + E_1Y^r = E_1Y^1 + E_1(E_2Y^2) + E_1(E_3Y^3) + \cdots + E_1(E_rY^r)$. ($9b$) ಗುಣಧರ್ಮದಿಂದ $i > 1$ ಗೆ $E_1E_i = 0$. ಹೀಗೆ $E_1X = E_1Y^1 = Y^1$. ಹಾಗೆಯೇ $i = 2, 3, \ldots, r$ ಗೆ $Y^i = E_iX$ ಮುಂದಿನ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

(11) V ಯಲ್ಲಿ X ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $i = 1, 2, \ldots, r$ ಗೆ Y^i ಯು E_i ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವಲ್ಲಿ, X ಯು $X = Y^1 + Y^2 + \cdots + Y^r$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇದಲ್ಲದೆ $i = 1, 2, \ldots, r$ ಗೆ $Y^i = E_iX$.

ಇದು (6) ರ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪವಾಗಿದೆ. (6) ರಿಂದ (7) ನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ (11) ರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 20 ನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಬಹುದು. $i = 1, 2, \ldots, r$ ಗೆ E_i ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ $D_i = \{X_i^1, X_i^2, \ldots, X_i^{k_i}\}$ ಯು ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. $D = \{X_1^1, X_1^2, \ldots, X_1^{k_1}, X_2^1, X_2^2, \ldots, X_2^{k_2},$

$\ldots, X_r^1, X_r^2, \ldots, X_r^{k_r}\}$ ಆಗಿರಲಿ. Y^iಯು E_i ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು $i = 1, 2, \ldots, r$ ಗೆ, D_i ನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು Y^i ಯು ಒಂದು ಏಕೈಕ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಲ್ಲಿ, V ಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು X ಯೂ $X = Y^1 + Y^2 + \cdots + Y^r$ ನಂತೆ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇದು D ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಫಲಿತಾಂಶ (10) D ಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸದಿಶವೂ T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ.

Q.E.D.

ಪ್ರಮೇಯ 18 ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯು 20 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಬಲ್ಲೆವು.

ಪ್ರಮೇಯ 21. V ಯ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು T ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಆಗಿರಲಿ. p ಯು Tಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಕೇವಲ p ಯು **ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ** ರೇಖಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಗೆ ಅಪವರ್ತನಗೊಂಡರೆ ಮಾತ್ರ, ಅಂದರೆ, $p = (t-c_1)(t-c_2)\cdots(t-c_r)$. ಇಲ್ಲಿ $c_1, c_2, \ldots, c_r$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ, ಹೀಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ. ಭಾಗ 3 ರ (13) ರಲ್ಲಿ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿರಲು ಪ್ರಮೇಯ 21 ರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ರೂಪವನ್ನು p ಹೊಂದುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದೆವು. ಪ್ರಮೇಯ 21ನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು p ಯು ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದಿದಲ್ಲಿ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮೊದಲು, ಪ್ರಮೇಯ 21 ರ ಮತ್ತು ಮೊದಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಭಾಗ 1 ರ (22) ರಲ್ಲಿ Δ (T ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿ) ವು $\dim V = n$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, n **ವಿಶಿಷ್ಟ** ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆಗ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಯಿತು. ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಭಾಗ 3 ರ (8) ರ ಕಾರಣದಿಂದ $p = \Delta$. ಭಾಗ 1 ರ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ $\dim V = 2$ ಆಗಿರುವ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ ಪ್ರಮೇಯ 21 ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದೆವು.

$c_1, c_2, \ldots, c_r$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, $p = (t-c_1)(t-c_2)\cdots(t-c_r)$ ಆಗಿರಲಿ. p ಯು T ಗೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 20 ರ ನಿರ್ಬಂಧಗಳು ಸಫಲವಾಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ ಹಿ (9) ಸಫಲವಾಗುವಂತೆ $E_1, E_2, \ldots, E_r$ ಪ್ರಲಂಬನಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬಯಸುತ್ತೇ

ಈ ಪ್ರಲಂಬನಗಳ ರಚನೆಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು, (9) ಸಫಲವಾ ವಂತೆ, ಅಶೂನ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳು $E_1, E_2, \ldots E_r$ ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಪ್ರಮೇಯ 20 ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಆಧಾರಗ $D_1, D_2, \ldots, D_r$ ಮತ್ತು D ಗಳಾಗಿರಲಿ. A ಯು D ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$(12)\quad A = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & & 0 \\ 0 & c_1 & & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & c_1 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & & & & 0 \\ & & & & 0 & c_2 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & & & & \vdots & & \ddots & & & & & \\ & & & & 0 & 0 & \cdots & c_2 & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & c_r & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & & & 0 & c_r & \cdots & 0 \\ & & & & & & & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & & & & & 0 & 0 & \cdots & c_r \end{bmatrix}$$

ಈ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಒಂದು ದತ್ತ i ಗೆ c_i ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸ್ಥಾನ (E_i ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. $1 \leq i \leq r$ ಗೆ D ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ E_iಯ ವ ಾತೃಕೆಯು Q_i ಆಗಿರಲಿ. $c_1, c_2, \ldots, c_r$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿವೆ ಎಂದಿರಲಿ. ಆ

$$(13)\quad Q_i = \left[\frac{(A - c_1 I)(A - c_2 I)\cdots(A - c_{i-1} I)(A - c_{i+1} I)}{(c_i - c_1)(c_i - c_2)\cdots(c_i - c_{i-1})(c_i - c_{i+1})}\right.$$

$$\left.\frac{\cdots(A - c_r I)}{\cdots(c_i - c_r)}\right],\quad i = 1, 2, \ldots,$$

(13) ರ ತಾಳೆ ನೋಡುವುದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ. (13) ರಿಂ $c_1, c_2, \ldots, c_r$ ಗಳಿಗೆ $P_1, P_2, \ldots, P_r$ ಗಳು ಲಾಗ್ರಾಂಜೆ ಅಂತರ್ಧ್ರುವೀಕರ

ಬಹುಪದಿಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, [ಭಾಗ 2 ರ (10) ನೋಡಿರಿ.] ಆಗ

(14) $$Q_i = P_i(A), \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

ಹೀಗೆ

(15) $$E_i = P_i(T), \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

ಈಗ $c_1, c_2, \ldots, c_r$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಲ್ಲಿ $p = (t-c_1)(t-c_2)\cdots(t-c_r)$ ಯು T ಗೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $r = 1$ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಆಗ $T = c_1 I$, ಇದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ. $r > 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಪ್ರಮೇಯ 20 ರ ಪ್ರಲಂಬನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಒಂದು ಸಾಧನವನ್ನು (15) ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. $c_1, c_2, \ldots, c_r$ ಗಳಿಗೆ $P_1, P_2, \ldots, P_r$ ಗಳು ಲಾಗ್ರಾಂಜೆ ಅಂತರ್‌ಧ್ರುವೀಕರಣ ಬಹುಪದಿಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ [ಭಾಗ 2 ರ (13) ನೋಡಿರಿ.]

(16)
$$\begin{aligned} 1 &= P_1 + P_2 + \cdots + P_r \\ t &= c_1 P^1 + c_2 P_2 + \cdots + c_r P_r. \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \ldots, r$ ಗೆ P_iಯು $t-c_i$ ಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು p ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವುದರಿಂದ

(17) $i \neq j$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ p ಯು $P_i P_j$ ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

$E_i = P_i(T)$, ಇದು $i = 1, 2, \ldots, r$ ಗೆ. ಆಗ (16) ಮತ್ತು (17) ಇವೆರಡರಿಂದ :

(a) $I = E_1 + E_2 + \cdots + E_r$,

(18) (b) $T = c_1 E_1 + c_2 E_2 + \cdots + c_r E_r$,

(c) $E_i E_j = 0$, ಇದು $i \neq j$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

(18a) ಯಿಂದ $E_1 = E_1 I = E_1(E_1 + E_2 + \cdots + E_r) = E_1^2 + E_1 E_2 + E_1 E_3 + \cdots + E_1 E_r$; (18$c$) ಯಿಂದ ನಾವು ಹೊಂದಿರುವುದು $E_1 E_2 = E_1 E_3 = \cdots = E_1 E_r = 0$. ಹೀಗೆ $E_1 = E_1^2$. ಒಂದು ಸದೃಶ ಸಾಧನೆಯು $i > 1$ ಗೆ, $E_i^2 = E_i$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು E_iಯೂ

ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದೆ. ಯಾವುದಾದರೂ i, $1 \leq i \leq r$ ಗೆ, $E_i = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $P_i(T) = 0$. Pಯು P_iಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, ಇದು ಹಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. $E_1, E_2, \ldots, E_r$ ಯು ಪ್ರಮೇಯ 20 ರ ನಿರ್ಬಂಧಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುವುದು.

ಟೀಕೆಗಳು. $c_1, c_2, \ldots, c_r$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ಆಗ (9)ರ ನಿರ್ಬಂಧಗಳಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 20 ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಲಂಬನ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆಂದು (15) ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ p ಯು ಪ್ರಮೇಯ 21ರ ನಿರ್ಬಂಧಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. ಆಗ T ಯು ಪ್ರಮೇಯ 20 ರ ನಿರ್ಬಂಧಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವಂತೆ (16). (17) ಮತ್ತು (18) ರಚನೆಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು. E_iನ ಪ್ರಲಂಬನಗಳು (9) ರ ನಿರ್ಬಂಧಗಳಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುವುದರಿಂದ $c_1, c_2, \ldots, c_r$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿರುವ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ, ಅವುಗಳನ್ನು T ಯ **ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. ಪ್ರಲಂಬನಗಳೊಂದಿಗೆ ಗಣನೆಗಳು ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸರಳವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, (9) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೂಪವು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಸುಲಭವಾಗಿದೆ ಎಂದರೆ, ಎಷ್ಟೋ ಸಲ T ಗೆ ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಲಕ್ಷ್ಯವೀಯಲಾಗುವುದೇ ಇಲ್ಲ.

$E_1, E_2, \ldots, E_r$ ಗಳು (9) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $i = 1, 2, \ldots, r$ ಗೆ ಸೇರಿರುವ T ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ E_iಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂದು (10) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಯಿತು. ಕೆಳಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿವೆ:

(19) T ಯು (9) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ ಕೇವಲ ಯಾವುದಾದರೂ i, $1 \leq i \leq r$ ಗೆ $c = c_i$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ c ಯು T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ. $c_1, c_2, \ldots, c_r$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ E_iನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಖಚಿತವಾಗಿ $i = 1, 2, \ldots, r$ ಗೆ, c_i ಗೆ ಸೇರಿರುವ T ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

(12) ರ ಮಾತೃಕೆ ರೂಪವು $1 \leq i \leq r$ ಗೆ k_i ಯು A ಯ ಕರ್ಣರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ c_i ನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಲ್ಲಿ $\det(cI - A) = (c - c_1)^{k1}(c-c_2)^{k2} \cdots (c-c_r)^{kr}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಯಾವುದಾದರೂ i, $1 \leq i \leq r$ ಗೆ $c = c$

ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ c ಯು ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈಗ $c=c_1$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು k_1 ಯು A ಯ ಕರ್ಣರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ c_1'ನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ, ಕೇವಲ X ನ k_1 ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಕೆಳಗಿರುವ ದಾಖಲಾತಿಗಳು ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, ನೀಟಸಾಲು ಮಾತೃಕೆ X ಯು c_1I-A ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿದೆ. Q_1 ಯು (13) ರಲ್ಲಿ ಇರಲು ಮತ್ತು $Q_1X=0$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧದಂತೆಯೇ ಇದೆ. ಇದು $i=1$ ಗೆ (19) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ. $i>1$ ಇದರ ಸಾಧನೆಯು ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಇದೆ.

f ಒಂದು ಬಹುಪದಿಗೆ ಮತ್ತು T ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗೆ $f(T)$ ಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದ್ದೇವೆ. $i\neq j$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $E_iE_j=0$ ಮತ್ತು $i=1, 2, \ldots, r$ ಗೆ $E_i^2=E_i$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $T=c_1E_1+c_2E_2+\cdots+c_rE_r$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$(20) \qquad f(T)=f(c_1)E_1+f(c_2)E_2+\cdots+f(c_r)E_r.$$

(20) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು, $f=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $1\leq k\leq n$ ಗೆ, $T^k=c_1^kE_1+c_2^kE_2+\cdots+c_r^kE_r$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ರೇಖಾತ್ಮಕತೆಯಿಂದ ಸೂತ್ರ (20) ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. $i\neq j$ ಆಗಿದ್ದರೆ $E_iE_j=0$ ಮತ್ತು $1\leq i\leq r$ ಗೆ $E_i^2=E_i$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $T^2=(c_1E_1+c_2E_2+\cdots+c_rE_r)(c_1E_1+c_2E_2+\cdots+c_rE_r)=c_1^2E_1+c_2^2E_2+\cdots+c_r^2E_r$. ಒಂದು ಸದೃಶ ಸಾಧನೆಯು $k>2$ ಗೆ $T^k=c_1^kE_1+c_2^kE_1+\cdots+c_r^kE_r$ ಎಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು (20) ನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

(20) ನ್ನು ಬಹುಪದಿಗಳಲ್ಲದ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. $f(c_i)$ ಯು $1\leq i\leq r$ ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವಂತೆ f ಯಾವುದಾದರೂ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $f(T$ ಯನ್ನು $f(c_1)E_1+f(c_2)E_2+\cdots+f(c_r)E_r$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಬಹುಪದಿ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿರುವಂತೆ, ಇದು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಹೊಸದೇನೂ ಅಲ್ಲ; $f(T)$ ಚಿಹ್ನೆಯು $f(c_1)E_1+f(c_2)E_2+\cdots+f(c_r)E_r$ ಗೆ ಕೇವಲ ಒಂದು ಅನುಕೂಲಕರ ಪ್ರತ್ಯುತ್ಪನ್ನಕರ ಚಿಹ್ನೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಚಿಹ್ನೆಯು ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ,

(21)

(a) $(f+g)(T)=f(T)+g(T)$,

(b) $(af)(T)=af(T)$,

(c) $(fg)(T)=f(T)g(T)=g(T)f(T)$.

ಈ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು $f(T)$ ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಿದ್ಧಸುತ್ತವೆ. $1 \leq i \leq r$ ಗೆ $c_i \neq 1$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $f(t) = 1/(1-t)$ ಮತ್ತು $g(t) = 1-t$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$f(T) = \frac{1}{1-c_1} E_1 + \frac{1}{1-c_2} E_2 + \cdots + \frac{1}{1-c_r} E_r$$

ಮತ್ತು $g(T) = (1-c_1)E_1 + (1-c_2)E_2 + \cdots + (1-c_r)E_r$. ಗುಣ ಧರ್ಮ (21c) ಇದರಿಂದ $f(T)g(T) = I$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. $E_i^2 = E_i$, $1 \leq i \leq r$ ಮತ್ತು $i \neq j$ ಆಗಿದ್ದರೆ $E_iE_j = 0$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಉಪ ಯೋಗಿಸಿ ಇದನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

T ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳನ್ನು (15) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗಣನೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡೋಣ. T ಯು ಕೆಳಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ R^3 ಮೇಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ.

$$(22) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ಇದರಿಂದ $\triangle = (t-1)^2(t-3)$. p ಯು T ಗೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿ ಆಗಿರಲಿ. ಗಣನೆಯಿಂದ $(A-I)(A-3I) = 0$ ಎಂದಾಗುವುದರಿಂದ $p = (t-1)(t-3)$. ಹೀಗೆ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ. P_1 ಮತ್ತು P_2 ಗಳು 1 ಮತ್ತು 3ಕ್ಕೆ ಲಾಗ್ರಾಂಜೆ ಅಂತರ್‌ಧ್ರುವೀಕರಣ ಬಹುಪದಿಗಳಾಗಿರಲಿ. $E_1 = P_1(T)$, $E_2 = P_2(T)$ ಆಗಿರಲಿ. Q_1 ಯು E_1 ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು Q_2 ಯು E_2 ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ.

$$P_1 = \frac{t-3}{-2} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad P_2 = \frac{t-1}{2},$$

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $Q_1 = (A-3I)/(-2)$, $Q_2 = (A-I)/2$. ಹೀಗೆ $A = Q_1 + 3Q_2$ ಮತ್ತು

$$(23) \qquad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. T ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮದ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. $\triangle$ ವು T ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು p ಯು T ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ. $\triangle$ ವು ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲದ ಒಂದು ವರ್ಗ ಅಪವರ್ತನ q ಅನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಾಗ p ಯು ಅದನ್ನೇ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. [ಭಾಗ 3 ರ (9) ನೋಡಿರಿ.] ಆದ್ದರಿಂದ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಆಗಿಲ್ಲ. $k_i \geq 1$, $i = 1, 2, \ldots, r$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು $c_1, c_2, \ldots, c_r$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಲ್ಲಿ $\triangle = (t-c_1)^{k1}(t-c_2)^{k2}\ldots(t-c_r)^{kr}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $1 \leq s_i \leq k_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $p = (t-c_1)^{s1}(t-c_2)^{s2}\cdots(t-c_r)^{sr}$ [ಭಾಗ 3 ರ (8) ನೋಡಿರಿ.] ಆಗ ಕೇವಲ $i = 1, 2, \ldots, r$ ಗೆ $s_i = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ.

p ಯು ಇಚ್ಛಿತ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆಯೇ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಬಹಳ ಕಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಅದೃಷ್ಟವಶಾತ್ p ಯು ಇಚ್ಛಿತ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲೇ ತಿಳಿದಿರುವ ಒಂದು ಪ್ರಸಂಗವಿದೆ. ಅದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗುವುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 22. V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು (X, Y) ಇದು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಆಗಿರಲಿ; ಅಂದರೆ, T^* ಯು (X, Y) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗಣಿಸಿದಲ್ಲಿ, $T = T^*$. ಆಗ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ. ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ನಾನಾ ಮಾರ್ಗಗಳಿವೆ. ನಾವು — ಆಯಾಮದ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ ಕೊಂಚ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣಗೊಳ್ಳುವ ಎರಡು ಯಾಮದ ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯ 4 ರಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಡುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಈ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಅಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಅನಂತ ಯಾಮಗಳಿಗೆ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣಗೊಳ್ಳುವ ಹಾಗೂ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಲು ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೊಡುವ ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ರೇಖಿಸುತ್ತೇವೆ.

$dim\ V = 2$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು A ಯು ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಅಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $A = A^t$ ಆಗುವುದರಿಂದ,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

ಆದ್ದರಿಂದ

$$(24) \quad \triangle = det\begin{bmatrix} t-a & -b \\ -b & t-c \end{bmatrix} = t^2 - (a+c)t + ac - b^2.$$

$\triangle$ ವು ವಾಸ್ತವಿಕ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಗೆ ಅಪವರ್ತನಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. $\beta^2 - 4\gamma \geq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $t^2 + \beta t + \gamma$ ವಾಸ್ತವಿಕ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಗೆ ಅಪವರ್ತನಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಅಪವರ್ತನಗಳು $\beta^2 - 4\gamma > 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿ $\beta^2 - 4\gamma = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸಮವಾಗಿಯೂ ಇವೆ [ಭಾಗ 2 ರ (14) ನೋಡಿರಿ.] ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ $\beta = (a+c)$ ಮತ್ತು $\gamma = ac - b^2$. ಹೀಗೆ $\beta^2 - 4\gamma = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b_2$. ಆದ್ದರಿಂದ $\beta^2 - 4\gamma \geq 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ $\triangle$ ವು ವಾಸ್ತವಿಕ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಗೆ ಅಪವರ್ತನಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. $\beta^2 - 4\gamma > 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$(25) \quad \triangle = (t-d)(t-e), \quad d \neq e.$$

p ಯು T ಗೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಪ್ರಮೇಯ 21 ರಿಂದ $p = (t-d)(t-c)$ ಮತ್ತು T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ. $\beta^2 - 4\gamma = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $a = c$ ಮತ್ತು $b = 0$. ಆದ್ದರಿಂದ

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

ಆಗುವುದರಿಂದ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಈಗ $dim\ V$ ಯು ನಿರಂಕುಶವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು p ಯು T ಗೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ. p ಯು ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸರಳ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಗೆ ಅಪವರ್ತನಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು. p ಯು ಹಾಗೆ ಅಪವರ್ತನಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಎರಡು ಪ್ರಸಂಗಗಳು ಪರಿಣಮಿಸಬಹುದು. ಮೊದಲನೆಯದಾಗಿ

$$(26) \quad p = (t-a)^2 q,$$

ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿದ ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ, ಎರಡನೆಯದಾಗಿ

$$(27) \quad g = t^2 + \beta t + \gamma \text{ ಮತ್ತು } \beta^2 - 4\gamma < 0 \text{ ಆಗಿರುವ } p = gq.$$

ಅಂದರೆ, ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲದ ಒಂದು ವರ್ಗ ಅಪವರ್ತನ [ಭಾಗ 2 ರ (16) ನೋಡಿರಿ.]

(26) ಮತ್ತು (27) ಎರಡೂ ವಿರೋಧಾಭಾಸಗಳಿಗೆ ಎಡೆ ಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ. ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು. (26) ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಗೃಹೀತವಾಗಿರಲಿ. $h=(t-a)q$ ಮತ್ತು $S=h(T)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ p ಯು h ಅನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ $S\neq 0$. $SX\neq 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ, X ಯು V ಯಲ್ಲಿರಲಿ. $SX\neq 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $(SX,SX)>0$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\begin{aligned} 0 &< (SX, SX) \\ &= ((T-aI)q(T)X,(T-aI)q(T)X) \\ &= ((T-aI)^2q(T)X,q(T)X) = (p(T)X,q(T)X) = 0. \end{aligned}$$

ಇದು ಒಂದು ವಿರೋಧಾಭಾಸವಾಗಿರುವುದರಿಂದ (26) ಸಫಲವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

(27) ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $S=g(T)$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು W ಯು S ನ ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. p ಯು q ಅನ್ನು ಭಾಗಿಸದೆ ಇರುವುದರಿಂದ, $q(T)\neq 0$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $q(T)X\neq 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ X ಯು V ಯಲ್ಲಿರಲಿ. ಆಗ $Sq(T)X=g(T)q(T)X=p(T)X=0$. ಆದ್ದರಿಂದ $q(T)X$ ಯು W ನಲ್ಲಿದೆ; ಅಂದರೆ, T_1 ಯು W ನಲ್ಲಿರುವ X ಗೆ $T_1X=TX$ ನಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ W ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. T_1 ಯು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ W ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು (ಅಂದರೆ, W ನಿಂದ V ಯ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಕೇವಲ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆ ಮಾತ್ರ ಅಲ್ಲ ಎಂದು). ಆದರೆ ಕೇವಲ $g(T)X=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ X ಯು W ನಲ್ಲಿದೆ. ಹೀಗೆ X ಯು W ನಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ, $g(T)TX=Tg(T)X=0$; ಅಂದರೆ, TX ಕೂಡ W ನಲ್ಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ T_1 ಯು W ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ. X ಮತ್ತು Y ಗಳು W ನಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $(T_1X,Y)=(TX,Y)=(X,TY)=(X, T_1Y)$; ಅಂದರೆ, W ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಿ T_1 ಯು ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ. $g(T_1)X=g(T)X=SX=0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, X ಯು W ನಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $g(T_1)$ ಯು W ಮೇಲಿನ ಶೂನ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ T_1 ಗೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯು g ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ g ಯು ವಾಸ್ತವಿಕ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಹೀಗೆ T_1ಗೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯು g ಆಗಿರಬೇಕು. ಈ ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ,

(28) (27) ಸಫಲಗೊಂಡರೆ, $T_1 = T_1^*$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತು g ಯು T_1ಗೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರುವಂತೆ V ಯ ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿ W ಅನ್ನು ಮತ್ತು W ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿ T_1 ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ I_wವು W ಮೇಲಿನ ಸಾಮ್ಯಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರುವಲ್ಲಿ $T_1^2 + \beta T_1 + \gamma I_w = 0$. ಆದ್ದರಿಂದ Wನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ Xಗಳಿಗೆ $T_1^2 X + \beta T_1 X + \gamma X = 0$. ಇದರ ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು X ನೊಡನೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಇದರಿಂದ

(29) $(T_1^2 X, X) + \beta(T_1 X, X) + \gamma(X, X) = 0$, Wನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ.

$\beta(T_1 X, X)$ ಗಾಗಿ (29) ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಕಡೆ ವರ್ಗಿಸಿರಿ.

(30) $$\beta^2(T_1 X, X)^2 = ((T_1^2 X, X) + \gamma(X, X))^2.$$

$(T_1 X, X)^2 \leq |T_1 X|^2 |X|^2$ (ಸ್ಕ್ವಾರ್ಜ್ ಅಸಮತೆ) ಮತ್ತು $(T_1^2 X, X) + \beta(T_1 X, X) = (T_1 X, T_1 X) = |T_1 X|^2$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ; $(X, X) = |X|^2$. ಇದರಿಂದ

(31) $$(|T_1 X|^2 + \gamma |X|^2)^2 \leq \beta^2 |T_1 X|^2 |X|^2.$$

$g \neq t$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $T_1 \neq 0$. ಆದ್ದರಿಂದ $T_1 X \neq 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ Wನಲ್ಲಿ X ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $|T_1 X| > 0$ ಮತ್ತು $|X| > 0$. ನಾವು ಈ X ಅನ್ನು (31) ರಲ್ಲಿ (27) ರ $\beta^2 - 4\gamma < 0$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧದೊಡನೆ ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ. ಇದರಿಂದಾಗಿ

(32) $$(|T_1 X|^2 + \gamma |X|^2)^2 < 4\gamma |T_1 X|^2 |X|^2.$$

(32) ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿರುವುದು ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

(33) $$(|T_1 X|^2 - \gamma |X|^2)^2 < 0.$$

ಇದು ಅಸಂಬದ್ಧವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ (27) ಒಂದು ವಿರೋಧಾಭಾಸಕ್ಕೆ ದಾರಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಟೀಕೆಗಳು : 22 ನೇ ಪ್ರಮೇಯವು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಗಹನವೆನಿಸಿದ ಪ್ರಮೇಯವಾಗಿದೆ. ಓದುಗರು ಈ ಸಾಧನೆಯತ್ತ ಹೆಚ್ಚು ಗಮನ ಹರಿಸಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಇದು ಇನ್ನಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಗೆ ದಾರಿ ಮಾಡುವ ಅನೇಕ ಪರಿಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಓದುಗನು 3×3 ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ ನೇರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೊಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವುದಾದರೆ ತೊಡಗುವ ಕ್ಲಿಷ್ಟತೆಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಸಾಧನೆಯ ಪರಿಹಾರವು (27) ರಿಂದ (28) ರ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಇದೆ. ಒಮ್ಮೆ (28) ನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡರೆ, ಸಾಧನೆಯ ಉಳಿದ ಭಾಗವು ಸ್ವ್ಯಾರ್ಜ್ ಅಸಮತೆ ಮತ್ತು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಪ್ರಮೇಯದ ಒಂದು ಸರಳ ಅನ್ವಯ ಮಾತ್ರ ಆಗಿದೆ.

(28) ರ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯ ಹಿಂದಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು ಹೀಗಿವೆ. T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು W ನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ TX ಯು W ನಲ್ಲಿರುವಂತೆ W ವು ಒಂದು ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ W ವು T ಗೆ ಒಂದು **ನಿಶ್ಚರ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ** ಆಗಿದೆ ಎನ್ನಲಾಗುವುದು. W ವು T ಗೆ ಒಂದು ನಿಶ್ಚರ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ T ಯನ್ನು W ಗೆ ಮಿತಿಗೊಳಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು W ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯನ್ನು ದೊರಕಿಸಬಹುದು ; ಅಂದರೆ, $T_1X = TX$, X ಯು W ನಲ್ಲಿ, ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆ T_1 ಯು W ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ. (28) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು,

(34) g ಯು ಒಂದು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದ್ದರೆ, ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದ T ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯ ಒಂದು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ T ಗೆ ಒಂದು ನಿಶ್ಚರ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು ಈ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗೆ T ಯ ನಿರ್ಬಂಧವು g ಯನ್ನು ತನ್ನ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

Δಕ್ಕೆ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಬಹಳ ಕಠಿಣವಾಗಿದೆ. T ಯು ಸಮಾಂಗವಾಗಿರುವ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ T ಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಅನೇಕ ವಿಧಾನಗಳು ಬೆಳೆದಿವೆ. ಈ ಕೆಳಗಿರುವ ವಿಶೇಷ ಅಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

T ಯು ಸಮಾಂಗವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು pಯು Tಗೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ ಆಗ c_1, c_2, c_3 ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಲ್ಲಿ $p=(t-c_1)(t-c_2)\cdots(t-c_r)$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲಾಗಿದೆ. $E_1, E_2 \ldots, E_r$ ಗಳು T ಯ ಮಿಥ ಪ್ರಲಂಬನಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ E_iಯು, (15) ರಿಂದ, T ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $E_i^* = E_i$. (ನೋಡಿ ಭಾಗ 2 ರ ಅಭ್ಯಾಸ 12). $E^2 = E = E^*$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿ E ಯನ್ನು ಒಂದು **ಲಂಬೀಯ ಪ್ರಲಂಬನ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪದಕೋಶವು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ,

(35) E ಯು ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ E ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು E ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕವಾಗಿದೆ.

E ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ X ಮತ್ತು E ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ Y ಇರಲಿ. ಆಗ (2) ರಿಂದ, $X=EX$ ಆಗುವುದರಿಂದ $(X,Y)=(EX,Y)=(X,EY)=0$. $dim\ V=$ ಸ್ಥಾನ $(E)+$ ಶೂನ್ಯತೆ (E) ಮತ್ತು $dim\ V=$ ಶೂನ್ಯತೆ $(E)+E$ ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕದ ಆಯಾಮ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ (35) ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

T ಯು ಸಮಾಂಗವಾಗಿರುವಾಗ

(a) $T=c_1E_1+c_2E_2+\cdots+c_rE_r$, ಇಲ್ಲಿ $c_1,c_2,\ldots,c_r$ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ.

(36) (b) $I=E_1+E_2+\cdots+E_r$.

(c) $E_iE_j=0$, ಇದು $i\neq j$ ಆಗಿದ್ದರೆ.

(d) $E_i^2=E_i^*=E_i\neq 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಲಂಬನ E_iಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಖಚಿತವಾಗಿ c_i ಗೆ ಸೇರಿರುವ, $1\leq i\leq r$, ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ. ಇದು (36a) ಮತ್ತು (19) ರಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶವು ಇದರ ಮತ್ತು (36c) ಮತ್ತು (36d) ಯ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿದೆ. ಈಗ ಒಂದು ನೇರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

(37) $T=T^*$ ಮತ್ತು $c\neq d$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $TX=cX$, $TY=dY$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(X,Y)=0$. ಬೇರೆ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ, cಗೆ ಸೇರಿರುವ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು $c\neq d$ ಆಗಿದ್ದರೆ, dಗೆ ಸೇರಿರುವ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

ಇದರಿಂದ $(c-d)(X,Y)=(cX,Y)-(X,dY)=(TX,Y)-(X,TY)=0$. $T=T^*$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯಿಂದ ಕೊನೆಯ ಸಮೀಕರಣವು ...ತವಾಗಿದೆ, $c-d\neq 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $(X,Y)=0$ ಎಂದು ಹೊಂದಿರಲೇ ...ಕು.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನ E_iಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ ...ನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 20 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇವೆರಡನ್ನೂ ...ಡಿಸಿ, T ಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು Vಗೆ ...ರಕಿಸಬಹುದು. (37) ರಿಂದ, ಈ ಆಧಾರವು ಸ್ವಯಂ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ ...ಗಿದೆ. ಲಂಬೀಯ ಆಧಾರಗಳೊಡನೆ ಗಣನೆಯು ಸುಲಭತರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ...ದೊಂದು ತುಂಬ ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿದೆ. ಈ ಪರಿಣಾಮವನ್ನು ...ರುನಿರೂಪಿಸುವುದಾದರೆ, ಇದು ಪ್ರಮೇಯ 22 ರ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವಾಗಿದೆ.

(38) $T=T^*$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ V ಯು, T ಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಟೀಕೆಗಳು : $\{X_1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ...ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. A ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. (38) ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ $T=T^*$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ, $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ Tಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ...ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿ, V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು B ಯು $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ...ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ B ಯು ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

P ಯು $i=1, 2, \ldots n$ ಗೆ $PX^i=Y^i$ ನಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ V ಯ ...ಮೇಲಿರುವ ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು P_0ಯು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ...ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ P ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 6 ರ (55) ಮತ್ತು (56) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಲ್ಲಿ

(39) $$B=P_0^{-1}AP_0.$$

$\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಮತ್ತು $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಗಳೆರಡೂ ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿವೆ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವು P ಮತ್ತು P_0ಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಇನ್ನಷ್ಟು ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

$$X = x_1 X^1 + x_2 X^2 + \cdots + x_n X^n.$$

ಆಗ $(X, P^* Y^i) = (PX, Y^i) = (x_1 PX^1 + x_2 PX^2 + \cdots + x_n P X^n, Y^i) = (x_1 Y^1 + x_2 Y^2 + \cdots + x_n Y^n, Y^i) = x_i (Y^i, Y^i) = (X, X^i)$. ಇದು ಯಾವುದೇ X ಗಾದರೂ ಸಫಲವಾಗುವುದರಿಂದ

$$(40) \qquad P^* Y^i = X^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \text{ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ $P^{-1} Y^i$ ಕೂಡ X^i ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 1 ರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲಾಗಿದೆ

$$(41) \qquad P^* = P^{-1}.$$

$\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ P^* ನ ಮಾತೃಕೆಯು $P_0^\dagger$ ಹಾಗೂ ಈ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ P^{-1} ನ ಮಾತೃಕೆಯು P_0^{-1} ಆಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$(42) \qquad P_0^\dagger = P_0^{-1}.$$

ಆಗುವುದರಿಂದ (39) ಕೆಳಗಿನ ರೂಪ ತಾಳುತ್ತದೆ

$$(43) \qquad B = P_0^\dagger A P_0.$$

$P^* = P^{-1}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ P ಯನ್ನು **ಲಂಬೀಯ**ವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. $P_0^\dagger = P_0^{-1}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆ P_0 ಯು **ಲಂಬೀಯ** $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಅನ್ನು R^n ನಲ್ಲಿರುವ ನಿಯತ ಆಧಾರವಾಗುವುದಕ್ಕಾಗಿ

(44) A ಯು ಸಮಾಂಗ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $P_0^\dagger A P_0$ ಯು ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಮಾತೃಕೆ P_0 ಇದೆ.

ಈಗ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ :

$$(45) \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \sqrt{2}/6 & -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{2}/6 & \frac{7}{6} & -\sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/6 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

ಗ [ಭಾಗ 3 ರ ಅಭ್ಯಾಸ 9(a) ಯು ಇದನ್ನು ಬೇಗ ಕೊಡುತ್ತದೆ.]

$$det\ (tI-A)=t^3-4t^2+5t-2=(t-1)^2(t-2).$$

A ಯು ಸಮಾಂಗವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ದರ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯು $(t-1)(t-2)$ ಆಗಿರಬೇಕು. $(I-A)$ ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯು $\{\sqrt{2}, 1, \sqrt{3}\}, (\sqrt{2}, -2, 0\}$, $(2I-A)$ ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯು $\{(2, \sqrt{2}, 2, -2\sqrt{3})\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಶಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬೀಯವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6}, 2), (1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{6}, 0), (2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{6}, -2/\sqrt{2})\}$ ಯು A ಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ, ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ವಾಗಿದೆ.

$$P_0=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -2/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

ಆಗ

$$P_0^t=P_0^{-1} \text{ ಮತ್ತು } \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=P_0^tAP_0$$

ಈ ಭಾಗದ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ವಿವಿಧ ಅನ್ವಯಗಳನ್ನು ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಇನ್ನುಳಿದ ಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲಾಗುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. ದತ್ತ ಸಮಷ್ಟಿ Vಯ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಕೆಳಗಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ E ಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಲಂಬನಗಳು ಯಾವುವು ?

   (a) $V=R^2;\ E(x,y)=(y,0)$

   (b) $V=R^3;\ E(x,y,z)=(3x+y+z, -3x-y-z, -3x-y-z)$

(c) $V = R^3$; $E(x, y, z) = (6x + 10y + 5z, -x - y$; $-4x - 8y - 3z)$

(d) $V = R^4$; $E(x, y, z, w) = (x + 3w, y - z, 0, 0)$

(e) $V = R^4$; $E(x, y, z, w) = (y, z, w, 0)$

(f) V ಯು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮುಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ. EA BA. ಇಲ್ಲಿ

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(g) V ಯು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮುಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; EA $BA - AB$, ಇಲ್ಲಿ

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(h) V ಯು ಸ್ತರ ≤ 2 ರ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮುಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; Ef $f(0)g$, ಇಲ್ಲಿ $g(0) = 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ g ಯು ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದೆ.

(i) V ಯು ಸ್ತರ ≤ 2 ರ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮುಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; $Ef = f(0)g + f(1)h$, ಇಲ್ಲಿ g ಮತ್ತು h ಗಳು $g(0) = h(0) = g(1) = h(1) = 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಬಹುಪದಿಗಳಾಗಿವೆ.

(j) V ಯು, $0 \leq t \leq 1$ ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು f ನ ಸಮುಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; $Ef = f(0)e^{-t}$.

2. ದತ್ತ ಸಮುಷ್ಟಿ V ಯ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಕೆಳಗಿರುವ ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿ Eಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. E ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನೂ ಮತ್ತು E ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮುಷ್ಟಿಯನ್ನೂ ವಿವರಿಸಿರಿ.

(a) $V = R^2$; $E(x, y) = (x, x)$

(b) $V = R^3$; $E(x, y, z) = (x, y, y)$

(c) $V = R^3$; $E(x, y, z) = (-y, y, x+y+z)$

(d) V ಯು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; $B^2 = B$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $EA = BAB$

(e) V ಯು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; $EA = (A + A^t)/2$

(f) V ಯು ಎಲ್ಲ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; $f'(0) = (df/dt)(0)$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $Ef = f(0) + f'(0)t$

(g) $0 \leq t \leq 1$ ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ f ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯು V ಆಗಿದೆ; $Ef(t) = f(t)$ಯು $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ ಗೆ ಮತ್ತು $Ef(t) = f(\frac{1}{2})$, ಇದು $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ ಗೆ.

3. ದತ್ತ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನ E ಯನ್ನು, ಉಪ ಸಮಷ್ಟಿ M ಅದರ ವ್ಯಕ್ತಿಯಾಗಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ [**ಸೂಚನೆ** M ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು Vಗೆ ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿರಿ].

(a) $V = R^2$; M ಇದು $(1, 2)$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

(b) $V = R^3$; M ಇದು $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ ಆಗಿದೆ.

(c) V ಯು ಸ್ತರ ≤ 2 ರ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $\{1 + t + t^2, 1 + t + 2t^2\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯು M ಆಗಿದೆ.

(d) V ಯು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು M ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. ದತ್ತ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯ ಮೇಲೆ, ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನ E ಯನ್ನು, ಅದರ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ದತ್ತ ಸಮಷ್ಟಿ M ಆಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯು ದತ್ತ ಸಮಷ್ಟಿ N ಆಗಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : M ಮತ್ತು N ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಮೂಲಕ V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರಿ.]

   (a) $V = R^2$; M ಇದು $y = 2x$ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು N ಇದು $y = \frac{1}{2}x$ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

   (b) $V = R^3$; M ಇದು $x = -2z$ ಸಮತಲವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು N ಇದು $x = y = z$ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

5. $V = R^2$ ಆಗಿರಲಿ. ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು X – ಅಕ್ಷವಿರುವ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರಲಂಬನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. E ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು Tಯು Vಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. $T = ET+(I-E)T = TE+T(I-E) = ETE+ET(I-E) + (I-E)TE+(I-E)T(I-E)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

7. E ಮತ್ತು F ಗಳು V ಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಲಂಬನಗಳಾಗಿರಲಿ. $E+F$ ಯು, ಕೇವಲ $EF = FE = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : $(E+F)^2$ ಅನ್ನು ಗಣಿಸಿರಿ.]

8. E ಯು, $E^2 = E$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. $tr(E)$ = ಸ್ಥಾನ (E) ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : E ಯನ್ನು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು (8)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. $E^2 = E$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ದಾಖಲಾತಿಗಳು ಏನಾಗಿರಬೇಕು ? ನಂತರ ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 6 ರ ಅಭ್ಯಾಸ 15 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

9. (*a*) $E \neq 0$, $E \neq 1$ ಮತ್ತು $E^2 = E$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ E ಗೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯು $(t-1)t$ ಆಗಿರಲೇಬೇಕೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[**ಸೂಚನೆ** : $E^2 = E$ ಮತ್ತು $E^2 - E = 0$ ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ.]

(b) $E^2 = E$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $n = dim\ V$, $n - k$ = ಸ್ಥಾನ (E) ಮತ್ತು k = ಶೂನ್ಯತೆ (E) ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, Eಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿಯು $t^k(1-t)^{n-k}$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : (8) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(c) $E \neq 1$ ಮತ್ತು $E^2 = E$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ Eಯು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

10. A ಯು ಕೆಳಗಿರುವ ಗುಣಧರ್ಮಗಳೊಡನೆ ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿರಲಿ, $A_{i(i+1)} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, (n-1)$; $i \neq n$ ಮತ್ತು $j \neq i+1$ ಆಗಿದ್ದರೆ $A_{ij} = 0$ $\triangle$ ವು A ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ. $\triangle = t^n - A_{nn}t^{n-1} - A_{n(n-1)}t^{n-2} - \ldots - A_{n2}\,t - A_{n1}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : $t\ I - A$ ಯ nನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗುಂಟ ಲಾಪ್ಲೇಸ್ ವಿಸ್ತರಣವೊಂದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

11. ಕೆಳಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳನ್ನು ಅಂದರೆ (14) ರಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಪ್ರಲಂಬನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

12. A ಯು 2×2 ಆಗಿರಲಿ. A ಯ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ A' ಮತ್ತು A ಯ ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲನ್ನು a ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಮತ್ತು ಬಂದದ್ದನ್ನು ಅದರ ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ A'' ದೊರೆಯಲಿ.

(a) A' ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿರದಿದ್ದರೂ A ಯು ಆಗಿರಬಹುದೆಂಬ ಒಂದು ಉದಾರಹಣೆ ಕೊಡಿ.

(b) A''ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿರದಿದ್ದರೂ A ಯು ಆಗಿರಬಹುದೆಂಬ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿ.

13. ಕೆಳಗಿರುವ R^3 ಮೇಲಿನ ಪ್ರಲಂಬನಗಳಲ್ಲಿ ನಿಯುತ ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪ್ರಲಂಬನ ಯಾವುದು ? ($(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + (x_1+y_1)(x_2+y_2) + (x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪ್ರಲಂಬನ ಯಾವುದು ?

(a) $E(x,y,z) = \left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}\right)$

(b) $E(x,y,z) = (x, x, 0)$

(c) $E(x,y,z) = (x, -x, 0)$

14. ಕೆಳಗಿರುವ ಪ್ರತಿ A ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ $P_0^{-1}AP_0$ ಯು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಮಾತೃಕೆ P_0 ಅನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{11}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 11 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

15. ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ $((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1 x_2 + (x_1+y_1)(x_2+y_2) + (x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)$ ಅನ್ನು R^3 ಹೊಂದಿರಲಿ. T ಯು $T(x, y, z) = (x, x+2y, x+y+3z)$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. ದತ್ತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯು ಸಮಾಂಗತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ ಮತ್ತು T ಯ ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ; ಈ ಪ್ರಲಂಬನಗಳು ದತ್ತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಕೂಡ ಸಮಾಂಗತವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

16. (a) A ಮತ್ತು P_0ಗಳು $n \times n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(P_0^t A P_0)^t = P_0^t A^t P_0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) P_0ವು ಸಮಕೋನೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು A ಯು ಸಮಾಂತಗವಾಗಿ ಇದ್ದರೆ ಆಗ $P_0^t A P_0$ ವು ಸಮಾಂಗತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(c) P_0ವು ಸಮಕೋನೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $P_0^t A P_0$ ವು ಕರ್ಣರೇಖೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ A ಯು ಸಮಾಂತಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಇದು ಸಂಮಿತತೆಯು ಕೂಡ, (44) ಸಫಲವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಒಂದು ಅವಶ್ಯಕ ನಿರ್ಬಂಧ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.]

17. (X, Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ. E ಯು (X, Y)ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮಕೋನೀಯ ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿರಲಿ. $P = 2E - I$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ P ಯು ಸಮಾಂಗತವೂ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಕೋನೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

18. ಸ್ಥಾನ $(T) = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಇಲ್ಲವೇ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಅಥವಾ $T^k = 0$. ಇದು ಯಾವುದಾದರೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $k > 1$ಗೆ, ಆದರೆ ಎರಡೂ ಆಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

19. qವು ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೂಲಗಳೊಡನೆ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ, ಅಂದರೆ,

$$q = a(t-c_1)(t-c_2)\cdots(t-c_k)$$

ಇಲ್ಲಿ $i \neq j$ ಮತ್ತು a ಯು ಅಶೂನ್ಯ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, $c_i \neq c_j$. $q(T) = 0$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : T ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯು ಯಾವ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು ?]

20. T ಯು R^n ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. $\triangle$ ವು Tಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು P ಯು ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ. T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಅಭ್ಯಾಸ 10ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇರಲಿ. $P = \triangle$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : $X = (1, 0, 0 .., 0)$ ಆಗಿರಲಿ. $\{X, TX, T^2X, \ldots, T^kX\}$ ಯು $k \leq (n-1)$ ಗೆ R^n ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ನಿರವಲಂಬಿತ ಗಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ $deg\, p \geq n$ ಎಂದು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಿರಿ.]

21. T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು f ಯು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ, $f(c)$ ಯು T ಯ ಯಾವುದೇ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆ c ಗೆ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವಂತೆ $f(t)$ ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳೇನು ?

22. $f(t) = e^t$ ಆಗಿರಲಿ. V ಯು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ (X, Y)ಅನ್ನು ಹೊಂದಿರಲಿ. $T = T^*$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ,

$$(f(T)X, Y) = (X, Y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(T^nX, Y)}{n!}.$$

[**ಸೂಚನೆ** : $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (t^n/n!)$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ ಮತ್ತು T ಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಕೋಣೀಯ ಆಧಾರಕ್ಕೆ X ಮತ್ತು Y ಗಳು ಸೇರಿರುವ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಪರಿಣಾಮವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.]

23. (a) T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯು c ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು P ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ c ಯು $P^{-1}TP$ ಯು ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) E ಯು ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನ ಮತ್ತು P ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $P^{-1}EP$ ಯು ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(c) T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು P ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $P^{-1}TP$ ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(d) T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, P ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು f ಯು $f(T)$ ಯು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(P^{-1}TP)$ ಯು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಮತ್ತು $f(P^{-1}TP) = P^{-1}f(T)P$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(e) T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಕೇವಲ T ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಕ್ಕೂ $SE = ES$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, $ST = TS$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳು T ಯಲ್ಲಿರುವ ಬಹುಪದಿಗಳಾಗಿವೆ.]

(f) T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $f(T)$ ಯು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವಂತೆ f ಯಾವುದೇ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಇದು $ST = TS$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ಪರಿಕರ್ಮಿ Sಗೆ $f(T)S = Sf(T)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : (e) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

24. $f(t) = \log t$, $t > 0$ ಮತ್ತು $g(t) = t^{5/2}$ ಆಗಿರಲಿ. $f(A)$ ಮತ್ತು $g(A)$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ, ಇಲ್ಲಿ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

[ಸೂಚನೆ: $P_0^{-1}AP_0$ ಯು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವಂತೆ P_0 ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸ $23(d)$ ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

25. (X,Y) ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ. $T=T^*$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು c ಯು T ಯ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿರಲಿ. $TX^1=cX^1$ ಒಡವೆ $(X^1,X^1)=1$ ಆಗಿರಲಿ. $(X,X)\le 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(TX,X)\le c$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ: $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು T ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿದ್ದು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರುವಂತೆ $X^2, X^3, \ldots, X^k$ ಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರಿ. X ಅನ್ನು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.]

26. Tಯು $T(x, y, z)=(-2x+y+2z, -4x+3y+2z, -5x+y+5z)$ ನಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ R^3 ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. M ಯು $\{(1,1,1,),(1,2,1)\}$ ನಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ.

(a) Tಗೆ M ನಿಶ್ಚರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) X ಯು M ನಲ್ಲಿದ್ದರೆ T_1ಯು $T_1X=TX$ ನಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ M ಮೇಲಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. $\{(1,1,1), (1,2,1)\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T_1ನ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

27. (a) Tಯು ಕೆಳಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ R^2 ಮೇಲಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

M ಯು T ಗೆ ಒಂದು ನಿಶ್ಚರ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲು, ಆಗ M ಇದು R^2 ಆಗಿದೆ ಅಥವಾ $M=\{(0,0)\}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) ($0<\theta<\pi/2$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ) Tಯು R^2 ಮೇಲಿರುವ $(0,0)$ನ ಸುತ್ತ θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ.

(c) Tಯು $x-$ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ R^2 ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಫಲನವಾಗಿರಲಿ. R^2ನ ಯಾವ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಗಳು Tಗೆ ನಿಶ್ಚರವಾಗಿವೆ?

28. Dಯು $Df = (d/dt)f$ ನಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವಿಕ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯು ಮೇಲಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. Mಯು ಸ್ತರ $\leq n$ ನ ಎಲ್ಲ ಬಹುಪದಿಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. Mಯು Dಗೆ ನಿಶ್ಚರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

29. $T=T^*$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು M ಯು T ಯ ಜೊತೆ ನಿಶ್ಚರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $M^\perp$ ಕೂಡ Tಗೆ ನಿಶ್ಚರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ:** X ಯು $M^\perp$ಗೆ ಸೇರಿರುವ ನಿರ್ಬಂಧವೇನು?]

30. (34) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ. [**ಸೂಚನೆ:** p ಯು T ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿರಲಿ. g ಯು (34) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇರುವಲ್ಲಿ, $p=gq$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. Wವು $q(T)$ ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ].

31. c ಯು Tಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿರಲಿ. M ಯು cಗೆ ಸೇರಿರುವ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. M ಯು Tಗೆ ನಿಶ್ಚರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

32. $\dim V>2$ ಮತ್ತು T ಯು Vಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $\dim M<\dim V$ ಮತ್ತು M ಯು Tಗೆ ನಿಶ್ಚರವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಅಶೂನ್ಯ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ M ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ:** ಭಾಗ 2 ರ (16) ನ್ನು ಮತ್ತು 30 ಮತ್ತು 31ನೇ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

33. A ಯು ಒಂದು 2×2 ಸಮಾಂಗ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.

(a) A ಯ ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(b) $P_0^{-1}AP_0$ವು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ವಿಲೋಮ ಸಾಧ್ಯ ಮಾತೃಕೆ P_0 ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ವಿಶೇಷ ಅಭ್ಯಾಸ

V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು (X, Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. Tಯು V ಯು ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $S = T^2$ ಆಗಿರಲಿ.

(a) ($|X| \leq 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ) $|TX| \leq k$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ $k \geq 0$ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ**: ಅಭ್ಯಾಸ 25ನ್ನು ನೋಡಿರಿ.]
ಭಾಗ (a) ಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು K ಯ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಕೆಳ ಸೀಮಾರೇಖೆ K_0 ಆಗಿರಲಿ.

(b) $|X| \leq 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ $|TX| \leq K_0$ ಎಂದು ಮತ್ತು $|X^1| \leq 1$ ಮತ್ತು $|TX^1| = K_0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸದಿಶ X^1 ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ**: c ಯು T ಯ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿರಲಿ. ಅಭ್ಯಾಸ 25 ರಲ್ಲಿನಂತೆ ಮುಂದುವರಿಸಿರಿ.]

(a) ಮತ್ತು (b) ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ನೇರವಾಗಿ, ಅಂದರೆ, ಪ್ರಮೇಯ 22 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆ, ಪ್ರೌಢ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಈ ಅಭ್ಯಾಸದ ಉಳಿದ ಭಾಗವು (a) ಮತ್ತು (b) ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಪ್ರಮೇಯ 22 ರ ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

(c) $|X| \leq 1$ ಮತ್ತು $|SX^1| = K_0^2$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $|SX| \leq K_0^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ**: $|SX^1| = |T^2X^1| = K_0$ $|T(TX^1/K_0)| \leq K_0^2 = |TX^1|^2 = (T^2X^1, X^1) \leq |T^2X^1| = |SX^1|$]

(d) $(SX^1, X^1) \cdots K_0^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ: $(SX^1, X^1) = (TX^1, TX^1)$.]

(e) $SX^1 = K_0^2 X^1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ: $Z = SX^1 - K_0^2 X^1$ ಆಗಿರ ಮತ್ತು $|Z|^2$ ಅನ್ನು ಗಣನೆಮಾಡಲು (c) ಮತ್ತು (d) ಭಾಗಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(f) K_0 ಅಥವಾ $-K_0$ ಯು T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ: $S - K_0^2 I = (T - K_0 I)(T + K_0 I)$ ಮತ್ತು $S - K_0^2 I$ ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ.]

(g) c ಯು T ಯ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. [ಭಾಗ (f) ನಿಂದ T ಯು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.] $TZ^1 = cZ^1, |Z^1| = 1$ ಆಗಿರಲಿ. M_1 ಯು $\{Z^1\}$ ನಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕವಾಗಿರಲಿ. M_1 ಯು T ಗೆ ನಿಶ್ಚರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(h) ಪ್ರಮೇಯ 22ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು, Tಯನ್ನು M_1ಗೆ ಮಿತಿಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು (a)ಯಿಂದ (g) ವರೆಗಿನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಈ ಮಿತಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ, ಇತ್ಯಾದಿ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

20, 21 ಮತ್ತು 22 ನೇ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ವಿಧದ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಪ್ರಮಾಣ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ. ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ರೂಪವು ಅನೇಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಹುವಾಗಿ ಸರಳೀಕರಿಸುತ್ತದೆ. *Hoffman* ಮತ್ತು *Kunze* ಗಳಲ್ಲಿ [14, ಅಧ್ಯಾಯ 7] ಮತ್ತು *Jacobson* [15, ಅಧ್ಯಾಯ 3] ಗಳಲ್ಲಿ ಜೋರ್ಡಾನ್ ರೂಪ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವ ಒಂದು ಅಧಿಕ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯ ಸಮಷ್ಟಿಯ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿಯೂ ಅಂತಹ ಒಂದು ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಾಗಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಬಹುಪದಿ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಒಂದು ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಕೇಲಿ ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯೊಂದಿಗೆ *Hoffman* ಮತ್ತು *Kunze* ಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ [14, 4 ಮತ್ತು 6ನೇ ಅಧ್ಯಾಯಗಳು]. ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯದ ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು *Churchill*ನಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು [4, ಪು 96]. ಬಹುಪದಿಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಅನೇಕ ಸಂಖ್ಯಾ ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು *Lanczos* ನಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು [19, 1 ಮತ್ತು 2ನೇ ಅಧ್ಯಾಯಗಳು].

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಹುಶಃ ಸುಲಭವಾಗಿಯೇ ಸಮಾಂಗ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು [ಅಧ್ಯಾಯ 2 ರ ಭಾಗ 5 ರ ಅಭ್ಯಾಸ 10 ನೋಡಿ]. ಅಂಥ ಒಂದು ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು *Lovitt*ನಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು [20, ಅಧ್ಯಾಯ 5] ಮುಂದಿನ ಚರ್ಚೆ ಮತ್ತು ರೇಖಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳ ಇನ್ನಿತರ ಅನೇಕ ಅನ್ವಯಗಳನ್ನು *Coruant* ಮತ್ತು *Hilbert* ನಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು [5].

ಭಾಗ 4 ರ ವಿಶೇಷ ಅಭ್ಯಾಸದ (*a*) ಮತ್ತು (*b*) ಭಾಗಗಳು, ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಒಂದು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪ್ರಮೇಯದ ಪರಿಣಾಮಗಳಾಗಿವೆ. ಇದು *Rudin* ನಲ್ಲಿ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ [23, ಪು 30 ಮತ್ತು 67]. *Rudin* [23, ಅಧ್ಯಾಯ 9] ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ತಂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಭಜನೆಯಲ್ಲಿ ಹಲವು ಮುಖ್ಯ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಕೂಡ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 4

ಸಂಕೀರ್ಣ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಮತ್ತು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಪ್ರಸಂಗ

ಭಾಗ 1. ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಶೀಲ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು

ಅಧ್ಯಾಯ 3ರಲ್ಲಿ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಮಾಡಲಾಯಿತು. T ಯು ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, T ಯ ಬಗ್ಗೆ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ಸುಲಭವಾಗಿ ಉತ್ತರಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ. S ಮತ್ತು T ಗಳು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ A ಯು S ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು B ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಈ ಆಧಾರವನ್ನು A ಮತ್ತು B ಎರಡೂ ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವಂತೆ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದಾಗಿರುವಂತೆ ಯಾವುದಾದರೂ ವಿಧಾನವನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಆಗ S ಮತ್ತು T ಗಳು ಎರಡನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡ ಬಹುತೇಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಉತ್ತರಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು. A ಮತ್ತು B ಗಳೆರಡೂ ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿರಬೇಕೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಗಳೆರಡೂ ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಇರುವಂತೆ V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಭರವಸೆ ಕೊಡುವ ಒಂದು ಸರಳ ನಿರ್ಣಾಯಕವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

A ಮತ್ತು B ಗಳು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ A ಮತ್ತು B ಗಳ ಅನೇಕ ಗಣನೆಗಳು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ಆಗ

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$A^2 + 3AB^2 - B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -40\frac{1}{8} \end{bmatrix},$$

$$A^{-3/2} - B^2 + I = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 & 0 \\ 0 & -2\frac{7}{8} \end{bmatrix}.$$

ಈಗ S ಮತ್ತು T ಗಳು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಒಂದು ಆಧಾರ $\{X_1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ A ಯು S ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತು B ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, ಆಗ S ಮತ್ತು T ಗಳು ಏಕಕಾಲಿಕವಾಗಿ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ; ಆಗ A ಮತ್ತು B ಎರಡೂ ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ S ಮತ್ತು T ಗಳ ಗಣನೆಗಳು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ತೋರಿಸುವಂತೆ ತುಂಬ ಸರಳವಾಗಿವೆ

S ಮತ್ತು T ಗಳು ಏಕಕಾಲಿಕವಾಗಿ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿರುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಕೇವಲ S ಮತ್ತು T ಎರಡಕ್ಕೂ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಆಧಾರವು V ಗೆ ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, S ಮತ್ತು T ಗಳೆರಡೂ ಏಕಕಾಲಿಕವಾಗಿ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು ಕೆಳಗಿರುವಂತೆ V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ;

(1) $$SX^i = a_i X^i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

(2) $$TX^i = b_i X^i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

ಹೀಗಿರಲಿ

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

ಕ್ಕೆ ದತ್ತ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ A ಯು S ನ ಮಾತೃಕೆ ಮತ್ತು B ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ

(3) $$AB = BA;$$

ಆಗುವುದರಿಂದ

(4) $$ST = TS.$$

ಅಲ್ಲದೆ

$$AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_nb_n \end{bmatrix};$$

ಆದ್ದರಿಂದ ST ಕೂಡ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ. $aA + bB$ ಯು ಯಾವುದೇ a ಮತ್ತು b ಗಳಿಗೆ ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $aS + bT$ ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ.

(5) S ಮತ್ತು T ಗಳು ಏಕಕಾಲಿಕವಾಗಿ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ; ಆಗ ST ಮತ್ತು $aS + bT$ ಗಳು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿವೆ.

ಈಗ ತಿಳಿಯುವಂತೆ, ನಿರ್ಬಂಧ (4) ಪ್ರಮುಖ ಗುಣಧರ್ಮವಾಗಿವೆ. $ST = TS$ ಆಗಿದ್ದರೆ S ಮತ್ತು T ಎರಡು ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು ವ್ಯತ್ಯಯಿಸುತ್ತವೆ ಎನ್ನಲಾಗುವುದು. ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ.

(6) S ಮತ್ತು T ಗಳು ವ್ಯತ್ಯಯಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು f ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ S ಮತ್ತು $f(T)$ ಗಳು ವ್ಯತ್ಯಯಿಸುತ್ತವೆ.

ಏಕೆಂದರೆ $ST^2 = (ST)T = (TS)T = T(ST) = T(TS) = T^2S$. ಮತ್ತು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ, $ST^k = T^kS$ ಇದು ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $k \geq 1$ ಗೆ. ಹೀಗೆ $f = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \cdots + c_nt^n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $S\,f(T) = S(c_0I + c_1T + c_2T^2 + \cdots + c_nT^n) = c_0SI + c_1ST + c_2ST^2 + \cdots + c_nST^n = c_0IS + c_1TS + c_2T^2S + \cdots + c_nT^nS = f(T)S$.

aI ಯು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿಯೊಡನೆಯೂ ವ್ಯತ್ಯಯಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದೂ ಮತ್ತು f ಮತ್ತು g ಗಳು ಬಹುಪದಿಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ [ಭಾಗ 2 ರ (20) ನೋಡಿ]

(7) $f(T)g(T)=g(T)f(T)$.

ಎಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. E ಮತ್ತು F ಗಳು ಪ್ರಲಂಬನಗಳೆಂದು ಇಟ್ಟು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

(8) $EF=FE$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ EF ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದೆ.

ಇದು $(EF)^2=(EF)(EF)=E(FE)F=E(EF)F=E^2F^2=EF$ ಎಂಬುದರಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಅಭ್ಯಾಸಗಳು (8) ರ ವಿಲೋಮವು ಮಿಥ್ಯೆಯೆಂದು ತೋರಿಸುವ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ.

ಇದುವರೆವಿಗೂ ದೊರಕಿಸಿದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಬಳಸಬಹುದು,

ಪ್ರಮೇಯ 23. V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿರಲಿ. S ಮತ್ತು T ಗಳು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿರಲಿ. $ST=TS$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ S ಮತ್ತು T ಗಳು ಏಕಕಾಲಿಕವಾಗಿ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿವೆ.

ಸಾಧನೆ: $c_1, c_2, \ldots, c_r$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು E_1, E_2, E_r ಗಳು ಕೆಳಗಿರುವಂತೆ ಅಶೂನ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳಾಗಿರಲಿ ಪ್ರಮೇಯ 20 ಮತ್ತು (ಪ್ರಮೇಯ 21 ರ ಮೇಲಿನ ಟೀಕೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ).

(a) $I=E_1+E_2+\cdots+E_r$,

(9) (b) $E_iE_j=0$, $i\neq j$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

(c) $S=c_1E_1+c_2E_2+\cdots+c_rE_r$.

ಹಾಗೆಯೇ $d_1, d_2, \ldots, d_k$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $F_1, F_2, \ldots, F_k$ ಗಳು ಕೆಳಗಿರುವಂತೆ ಅಶೂನ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳಾಗಿರಲಿ.

(a) $I=F_1+F_2+\cdots F_k$,

(10) (b) $F_iF_j=0$ ಇದು $i\neq j$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

(c) $T=d^1F_1+d_2F_2+\cdots+d_kF_k$.

(9a) ಯನ್ನು (10c) ಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು (10a) ಯನ್ನು (9c) ಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.

(a) $S = c_1E_1F_1 + c_1E_1F_2 + \cdots + c_1E_1F_k + c_2E_2F_1 + c_2E_2F_2$
$+ \cdots + c_2E_2F_k + \cdots + c_rE_rF_1$
) $+ c_rE_rF_2 + \cdots + c_rE_rF_k,$
ಎಂದು ಕೊಡುವುದು.

(b) $T = d_1F_1E_1 + d_1F_1E_2 + \cdots + d_1F_1E_r + d_2F_2E_1 + d_2F_2E_2$
$+ \cdots + d_2F_2E_r + \cdots + d_kF_kE_1$
$+ d_kF_kE_2 + \cdots + d_kF_kE_r.$

ಅಂಕನವನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಲು $C_{ij} = E_iF_j$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $D_{ij} = F_jE_i$) $1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq k$ ಗೆ ನಾವು $1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq k$ ಗೆ S ನಲ್ಲಿ E_i ಯು F_j ಯು Tಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ ಾಗ 4 ರ (15) ನೋಡಿರಿ.] ಹೀಗೆ (6) ರ ಎರಡು ಅನ್ವಯಗಳಿಂದ E_i ಮತ್ತು ಗಳು ವ್ಯತ್ಯಯಿಸುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, $C_{ij} = D_{ij}$ ಎಂದು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಪ್ರತಿ ಂದು C_{ij} ಯೂ ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನ ಎಂದು (8) ರಿಂದ ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

2) $C_{ij}C_{ls} = 0$ ಇದು $i \neq l$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅಥವಾ $j \neq s$ ಆಗಿದ್ದರೆ.

$C_{ij}C_{ls} = E_i(F_jE_l)F_s = E_iE_lF_jF_s$, ಆದ್ದರಿಂದ (9$b$) ಅಥವಾ 0$b$) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ $i \neq l$ ಅಥವಾ $j \neq s$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಇದು 0.

(9a) ಯಲ್ಲಿ (10a) ಯು ಮತ್ತು (10a) ಯಲ್ಲಿ (9a) ಇದರ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪನೆ ಂದ

(a) $I = E_1F_1 + E_1F_2 + \cdots + E_1F_k + E_2F_1 + E_2F_2$
$+ \cdots + E_2F_k + \cdots + E_rF_1 + E_rF_2$
3) $+ \cdots + E_rF_k,$
(b) $I = F_1E_1 + F_1E_2 + \cdots + F_1E_r + F_2E_1 + F_2E_2$
$+ \cdots + F_2E_r + \cdots + F_kE_1 + F_kE_2$
$+ \cdots + F_kE_r.$

(11), (12) ಮತ್ತು (13)ರಲ್ಲಿ 0 ಗಳಾಗಿರುವ ಆ C_{ij} ಗಳನ್ನು ವರ್ಜಿಸಿದರೆ 11a), (12) ಮತ್ತು (13a) ಗಳು S ಗೆ ಪ್ರಮೇಯ 20 ರಲ್ಲಿ ಇರುವ ನಿರ್ಬಂಧ ೀ (ಅಂಕನ ಬದಲಾವಣೆಗಳೊಡನೆ) ಆಗಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. (11b), 12) ಮತ್ತು (13b)ಗಳು T ಗೆ ಪ್ರಮೇಯ 20 ರಲ್ಲಿರುವುದೇ ಆಗಿವೆ. ಪ್ರಮೇಯ 0 ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ, $C_{ij} \neq 0$ ಆಗಿರುವಂಥ ಪ್ರತಿಯೊಂದು C_{ij} ಯು ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ

ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು S ಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿದೆವು. $C_{ij} = D_{ij}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದೇ ಸಾಧನೆಯು ಈ ಆಧಾರವು T ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯ ಮಾತೃಕೆ ಸೂತ್ರಾಚರಣೆಯು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವಾಗಿದೆ. A ಮತ್ತು B ಗಳು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆಗೆ ಸದೃಶವಾಗಿವೆ.

(14) $AB = BA$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $P_0^{-1}AP_0$ ಮತ್ತು $P_0^{-1}BP_0$ ಗಳೆರಡೂ ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಮಾತೃಕೆ P_0 ಇದೆ.

ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ A ಯು S ನ (14) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು R^nಗೆ ಇರುವ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲು ಮತ್ತು B ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ನಂತರ ಪ್ರಮೇಯ 23 ನ್ನು ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 6 ರ (56) ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 23, ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿದಂತೆ ಇರುವ ಸಮಾಂಗ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೂ ಕೂಡ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತದೆ,

(15) $S = S^*, T = T^*$ ಮತ್ತು $ST = TS$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ S ಮತ್ತು T ಎರಡಕ್ಕೂ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮ ಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವು V ಗೆ ಇದೆ.

$S = S^*$ ಮತ್ತು $T = T^*$ ಆಗಿರುವ ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿ E_i ಮತ್ತು F_j ಗಳು (9) ಮತ್ತು (10) ರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವಲ್ಲಿ $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, k$ ಗೆ $E_i = E_i^*$ ಮತ್ತು $F_j = F_j^*$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಪ್ರಮೇಯ 23 ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ $E_iF_j = F_jE_i$ ಮತ್ತು $(E_iF_j)^2 = E_iF_j$ ಹೀಗೆ $(E_iF_j)^* = F_j^*E_i^* = F_jE_i = E_iF_j$. ಇದು E_iF_j ಯು ಪ್ರತಿಯೊಂದು i ಮತ್ತು j ಗೆ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪ್ರಲಂಬವೆಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಭಾಗ 4 ರ (38) ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ; ಈಗ (11), (12) ಮತ್ತು (13) ಮೂರನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ನಿರ್ಬಂಧದೊಡನೆ ಸೇರಿಸಿ (15) ನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು,

(16) $(E_iF_j)^* = E_iF_j, \quad 1 \leq i \leq r, \; 1 \leq j \leq k$.

ಇದನ್ನು (14) ನ್ನು ತೀಕ್ಷ್ಣತರ ರೂಪಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು A ಮತ್ತು B ಗಳು ಸಮಾಂಗ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $AB = BA$, ಆಗ

(17) $P_0^{-1}AP_0$ ಮತ್ತು $P_0^{-1}BP_0$ ಗಳೆರಡೂ ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಮಾತೃಕೆ P_0 ಇದೆ.

ಭಾಗ 4 ರಲ್ಲಿ (38 , ರಿಂದ (44) ಸಿದ್ಧಿಸಿದ ಹಾಗೆಯೇ (15) ರಿಂದ (17) ರ ಸಾಧನೆಯು ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

P_0 ನ ರಚನೆಯನ್ನು (11) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಿರ್ವಹಿಸಬಹುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು i ಮತ್ತು j ಗೆ E_iF_j ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಮತ್ತು ಇವುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿ R^nಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. ಈ ಆಧಾರವು. $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಆಗಿದೆ ಎನ್ನಿ. ಆಗ $r = 1,2,\ldots, n$ ಗೆ P_0 ತನ್ನ rನೇ ನೀಟಸಾಲನ್ನು Y^r ಆಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. [ನೋಡಿರಿ ಅಧ್ಯಾಯ 1 ಭಾಗ 6 ರ (55).] $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಯು ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ P_0 ಲಂಬೀಯವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. ದತ್ತ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಕೆಳಗಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು S ಮತ್ತು T ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ, S ಮತ್ತು T ಗಳು ವ್ಯತ್ಯಯಿಸುತ್ತವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

(a) $V = R^2$; $S(x, y) = (2x + y, x - y)$ ಮತ್ತು
$T(x, y) = (x - 3y, y)$

(b) $V = R^2$; $S(x, y) = (x + 2y, y)$ ಮತ್ತು
$T(x, y) = (x + 4y, y)$

(c) $V = R^3$; $S(x, y, z) = (3x - y, z, 2x + y)$ ಮತ್ತು
$T(x, y, z) = (3x - 7y - z, 2x + y - 2z, 2x - 4y + z)$

(d) $V = R^3$; $S(x, y, z) = (3x, 2y, z)$ ಮತ್ತು
$T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$

(e) $V = R^3$; $S(x, y, z) = (x, y, x+y+z)$ ಮತ್ತು
$T(x, y, z) = x+y, x+y, 6x-y+2z)$

(f) V ಯು, ಸ್ತರ ≤ 2 ಉಳ್ಳ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

$$Sf = \frac{d}{dt} f \text{ ಮತ್ತು } Tf = \frac{1}{t} \int_0^t f(u)du.$$

(g) V ಯು ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವಿಕ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; $Sf(t) = tf(t)$ ಮತ್ತು $Tf(t) = (d/dt)f$.

(h) V ಯು $0 \leq t \leq 1$ ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು $f(t)$ ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; $Sf(t) = tf(t)$ ಮತ್ತು $Tf(t) = \sqrt{1-t^2}\, f(t)$.

(i) V ಯು $0 \leq t \leq 1$ ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು $f(t)$ ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; $Sf(t) = \int_0^1 e^{-tu} f(u)du$ ಮತ್ತು $Tf(t) = tf(t)$.

2. ದತ್ತ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಕೆಳಗಿರುವ S ಮತ್ತು T ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ S ಮತ್ತು T ಗಳು ಏಕಕಾಲಿಕವಾಗಿ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : ಪ್ರಮೇಯ 23 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(a) $V = R^2$; $S(x,y) = (x+2y, 2x-y)$ ಮತ್ತು
$T(x,y) = (-y, -x+y)$

(b) $V = R^2$; $S(x\ y) = (13x-2y, -3x+8y)$ ಮತ್ತು
$T(x,y) = (5x-4y, -6x-5y)$

(c) $V = R^3$; $S(x,y,z) = (-2x+y+2z, -4x+3y+2z, -5x+y+5z)$ ಮತ್ತು
$T(x, y, z) = (-2x+2y, -4x+4y, -2x+2y)$

(d) $V=R^3; S(x,y,z)=(x+2y+z, 2x+6y-z, x-y)$ ಮತ್ತು $T(x,y,z)=(-6x+y-7z, x-y+2z, -7x+2y-4z)$

(e) V ಯು ಸ್ತರ ≤ 2 ರ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ;

$$Sf(t)=\frac{d}{dt}(tf) \quad \text{ಮತ್ತು} \quad Tf(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f(u)du$$

3. R^3 ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಕೆಳಗಿರುವ S ಮತ್ತು T ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಒಂದು ಆಧಾರ R^3 ಅನ್ನು, ಆ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ S ಮತ್ತು T ಗಳ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $S(x,y,z)=(-2x+y+2z, -4x+3y+2z, -5x+y+5z)$
$T(x,y,z)=(-2x+2y, -4x+4y, -2x+2y)$

(b) $S(x,y,z)=(x+2y, 2x-y, z)$
$T(x,y,z)=(-y, -x+y, z)$

4.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix} \text{ ಆಗಿರಲಿ.}$$

$f(t)=e^t$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $(A+B)^{10}, (AB)^{16}$ ಮತ್ತು $f(A+B)$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : $P_0^{-1}AP_0$ ಮತ್ತು $P_0^{-1}BP_0$ ಗಳು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವಂತೆ P_0 ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ].

5. (a) S ಮತ್ತು T ಗಳೆರಡೂ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿರಲಿ. $f(t)=e^t$ ಆಗಿರಲಿ. $ST=TS$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $f(S+T)=f(S)f(T)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : S ಮತ್ತು T ಗಳನ್ನು (11) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.]

(b)

$$A+B=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix} \text{ ಆಗುವಂತೆ } A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \text{ ಆಗಿರಲಿ.}$$

A, B ಮತ್ತು $A+B$ ಗಳು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದೂ, ಆದರೂ $f(t)=e^t$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $f(A+B)\neq f(A)f(B)$ ಎಂದೂ ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ :** $f(A)$ ಮತ್ತು $f(B)$ ಗಳನ್ನು ಗಣಿಸಲು A ಮತ್ತು B ಗಳ ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭತಮವಾಗಿದೆ].

6. (a) S ಮತ್ತು T ಗಳು ಸಮಾಂಗವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಕೇವಲ S ಮತ್ತು T ಗಳು ವ್ಯತ್ಯಯಿಸಿದರೆ ಮಾತ್ರ ST ಯು ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) E ಮತ್ತು F ಗಳು ಲಂಬೀಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳಾಗಿರಲಿ. ಕೇವಲ $EF=FE$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ. EF ಯು ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

7. (a)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix} \text{ ಆಗಿರಲಿ.}$$

$A^2=A, B^2=B, (AB)^2=AB, (BA)^2=BA$ ಮತ್ತು $AB\neq BA$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b)

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \text{ ಆಗಿರಲಿ.}$$

$A^2=A,\ B^2=B,\ (AB)^2=AB$ ಮತ್ತು $(BA)^2\neq BA$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(c)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \text{ ಆಗಿರಲಿ.}$$

$A^2=A,\ B^2=B,\ (AB)^2\neq AB$ ಮತ್ತು $(BA)^2\neq BA$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(d) E ಮತ್ತು F ಗಳು R^2 ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರಲಂಬನಗಳಾಗಿರಲಿ, ಅವುಗಳ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ಕ್ರಮವಾ। ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix},$$

E ಮತ್ತು F ಗಳ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. (x,y) ನಿಂದ $E(x,y)$ ಗೆ, $F(x,y)$ ಗೆ, $EF(xy)$ ಗೆ ಮತ್ತು $FE(x,y)$ ಗೆ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವಾಗಲೂ ರೇಖೆಗಳನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ಮತ್ತು

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

8. $\dim V = n$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು S ಮತ್ತು T ಗಳು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಯಿಸುವ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಾಗಿರಲಿ. S ಮತ್ತು T ಗಳು ಎರಡೂ n ವಿಶಿಷ್ಟ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಕೇವಲ X ಯು T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ X ಯು S ನ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : S ಮತ್ತು T ಗಳು ಎರಡಕ್ಕೂ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರಿ. X ಅನ್ನು ಈ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.]

9. (a) E ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು M ಇದು E ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಾಗಿರಲಿ ಕೇವಲ $TE = ETE$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, T ಗೆ M ಯು ಒಂದು ನಿಶ್ಚರ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : ಕೇವಲ $X = EX$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ X ಯು M ನಲ್ಲಿದೆ]

(b) E ಯು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಲಂಬೀಯ ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. M ಯು E ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು N ಇದು E ಯ ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. $N = M^{\perp}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : $EX = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(X, EY) = 0$.]

(c) E ಯು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪ್ರಲಂಬನ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಕೇವಲ E ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಗಳು T ಗೆ ನಿಶ್ಚರವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು E ಯೊಡನೆ ವ್ಯತ್ಯಯಿಸುತ್ತದೆ.

ಭಾಗ 2. ನೈಜ ನಿಶ್ಚಿತ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು

ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ ಅನೇಕ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಎಂದು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯು ಮೇಲಿನ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಲ್ಲಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಡನೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುತ್ತೇವೆ.

R^2 ಮೇಲಿರುವ ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು X, Y ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅದರಿಂದ $X=(x_1, x_2)$ ಮತ್ತು $Y=(y_1, y_2)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ,

(1) $$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

(X,Y) ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದರೆ

(2) $$(X,Y) = 4x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 2x_2 y_2,$$

ಇಲ್ಲಿ $X=(x_1, x_2)$ ಮತ್ತು $Y=(y_1, y_2)$, ಆಗ (X,Y) ಯು R^2 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ. ಪದೋಕ್ತಿ (2), ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ $(X,Y)=(Y,X)$ ಎಂದು ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ Y ಗೆ X ನಲ್ಲಿ (X,Y) ಯು ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ X ಗೆ Y ನಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. $X \neq 0$ ಮತ್ತು $X=(x_1, x_2)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(X,X) = 4x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2 = 2(x_2^2 - x_1 x_2 + 2x_1^2) = 2(x_2^2 - x_1 x_2 + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{7}{4}x_1^2) = 2((x_2 - \frac{1}{2}x_1)^2 + \frac{7}{4}x_1^2)$. ಈ ಅಂತಿಮ ಪದೋಕ್ತಿಯು ವರ್ಗಗಳು ಒಂದು ಮೊತ್ತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದು ≥ 0 ಆಗಿದೆ. $2((x_2 - \frac{1}{2}x_1)^2 + \frac{7}{4}x_1^2) = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ x_1 ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರಲೇಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ x_2 ಕೂಡ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ಇದು (2), R^2 ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

(X,Y) ಮತ್ತು $X \cdot Y$ ಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು

$X^1 = (1,0)$ ಮತ್ತು $X^2 = (0,1)$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಿರಿ.

$$(3) \qquad A = \begin{bmatrix} (X^1,X^1) & (X^2,X^1) \\ (X^1,X^2) & (X^2,X^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

ಆಗ (2)ನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪುನಃ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು,

$$(4) \qquad (X,Y) = (y_1 y_1)\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

A ಯನ್ನು ($\{X^1, X^2\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ) ತನ್ನ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ P ಯು R^2 ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ (4) ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪುನಃ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$(5) \qquad (X,Y) = PX \cdot Y.$$

ಇದು $PX = Z$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಕೇವಲ ಕೆಳಗಿನಂತಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ. $X = (x_1, x_2)$ ಮತ್ತು $Z = (z_1, z_2)$

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \text{ ಮತ್ತು } Z \cdot Y = (y_1 y_2)\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

(5) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಪರಿಕರ್ಮಿ P ಯನ್ನು ಅಥವಾ (4) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಮಾತೃಕೆ A ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ (X,Y) ಯನ್ನು $X \cdot Y$ ನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. R^n ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವೂ (5) ಸಫಲವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿಯನ್ನು ಉತ್ಪತ್ತಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಕೊಡುವ ಮೊದಲು, P ಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತೇವೆ.

$A = A^t$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $P = P^*$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ (ಇಲ್ಲಿ P^* ಯು $X \cdot Y$ ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಗಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ.) ಆದ್ದರಿಂದ P ಯು $X \cdot Y$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ. (5) ರಿಂದ ಮತ್ತು (X,Y) ಯು ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯಿಂದ

$$(6) \qquad PX \cdot X > 0 \text{ ಇದು } X \neq 0 \text{ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.}$$

ಇದು $X \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ >0 ಆಗಿರುವ $PX \cdot X = (X,X)$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿ

ಯಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. (3) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡ ಗಣನೆಯು P ೦ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು $3+\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $3-\sqrt{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತ ಇವೆರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ >0 ಆಗಿವೆ. (6) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಇದನ ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು. c ಯು P ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ $X \neq 0$ ಯೊಡನೆ $PX = cX$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $(X,X)>0$ ಮತ್ತು $X\cdot X>$ ಅಲ್ಲದೆ $(X,X) = PX\cdot X = cX\cdot X\cdot$ $c>0$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇ ಅಂದರೆ,

(7) P ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು ನೈಜವಾಗಿವೆ.

ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತೀರ್ಮಾನಿಸಲು (2), (6) ಅಥವಾ (7) ನ್ನು ಉಪಯೋ ಬಹುದು.

(8) P ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 3 ರ, ಭಾಗ ರ (36) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡಲ್ಲಿ,

(9)
(a) $P=(3+\sqrt{2})E_1+(3-\sqrt{2})E_2$,
(b) $I=E_1+E_2$,
(c) $E_1E_2=E_2E_1=0$,
(d) $E_i^2=E_i^*=E_i\neq 0, \quad i=1, 2.$ (E_i^* X,Y ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ.) ಎಂದಾಗು

$Q=\sqrt{3+\sqrt{2}}\ E_1+\sqrt{3-\sqrt{2}}\ E_2$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $Q=Q^*$ (X ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ) ಮತ್ತು $Q^2=P$. ಇದು P ಯು ಒಂದು ವರ್ಗಮೂ ಹೊಂದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. Q ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ (X ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ) ಮತ್ತು Qನ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಾಗಿರುವ $\sqrt{3+\sqrt{2}}$ $\sqrt{3-\sqrt{2}}$ ಗಳು >0 ಆಗಿವೆ.

(10) ತನ್ನ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು >0 ಆಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಸಮಾಂಗ ಪರಿಕರ್ಮ Q ($X\cdot Y$ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ) ಇದೆ $Q^2=P$

P ಯು (Q [illegible]) (X,Y) ಗೆ ಕೂಡ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸಮಾಂಗ

ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಏಕೆಂದರೆ $(PX, Y) = P(PX \cdot Y = PX \cdot PY = (X, PY)$. ಈ ಸಮತೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮ ಮತ್ತು ತೃತೀಯಗಳು (5) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಎರಡನೇ ಸಮತೆಯು P ಯು $X \cdot Y$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಈಗ P_1ಯು $(X, Y) = P_1 X \cdot Y$, R^2 ನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ ಆಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತೊಂದು ಪರಿಕರ್ಮೀಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಧ್ಯಾಯ 2 ರ ಭಾಗ 5 ರ (10) ರಿಂದ $P_1 = P$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ

(11) P ಯು ನಿರ್ಬಂಧ (5) ರಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಲು, R^2ಗೆ ಆಧಾರದ ಆಯ್ಕೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವ (2) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಕೊಂಚ ಅನಾನುಕೂಲಕರವಾಗಿದೆ. ಪ್ರಮೇಯ 16 ನಮಗೆ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪ್ರಸಂಗವನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ V ಯು ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ನಿರಂಕುಶ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು $X \cdot Y$ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ ಮತ್ತು ಸಮಾಂಗತ್ವದ ಬಗೆಗಿನ ಎಲ್ಲ ಉಕ್ತಿಗಳು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ $X \cdot Y$ ಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ.

V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ P, P ಯು ಸಮಾಂಗವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $X \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $PX \cdot X > 0$ Pಯನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. 'ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ'ಗೆ ಬದಲಾಗಿ 'ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ' ಎಂಬ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಪದವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. (7)ರಿಂದ (10) ರವರೆಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

P ಯು V ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಎಂದು ಮತ್ತು c ಯು P ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆ ಎಂದು, $X \neq 0$ ಇರುವ $PX = cX$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $PX \cdot X = cX \cdot X$. $PX \cdot X > 0$ ಮತ್ತು $X \cdot X > 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $c > 0$ ಎಂದು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ಇದರಿಂದ ಕೆಳಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

(12) P ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ P ಯ ಎಲ್ಲ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳೂ >0 ಆಗಿವೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ಭಾಗಶಃ ಒಂದು ವಿಲೋಮವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇದನ್ನು ನೇರವಾಗಿ, V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು $X\cdot Y$ಯನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸುವುದರಿಂದ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಅದರ ಬದಲು (10) ರ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪವನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು (12) ರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ.

$P=P^*$ ಮತ್ತು P ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $P=P^*$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅಧ್ಯಾಯ 3 ರ ಭಾಗ 4 ರ (36) ರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ,

(a) $P=c_1E_1+c_2E_2+\cdots+c_rE_r$,

(b) $I=E_1+E_2+\cdots+E_r$,

(13) (c) $E_iE_j=0, \quad i\neq j$,

(d) $E_i^2=E_i^*=E_i\neq 0, \quad i=1,2,\ldots,r$.

c_i ಸಂಖ್ಯೆಗಳು P ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $i=1,2,\ldots,r$ ಗೆ $c_i>0$. $f(t)=\sqrt{t}$ ಮತ್ತು $Q=f(P)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $Q=\sqrt{c_1}E_1+\sqrt{c_2}E_2+\cdots+\sqrt{c_r}E_r$, $Q=Q^*$ ಮತ್ತು $Q^2=P$. ಅಲ್ಲದೆ $\sqrt{c_1}, \sqrt{c_2},\ldots, \sqrt{c_r}$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು Q ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಾಗಿವೆ. [ಅಧ್ಯಾಯ 3ರ ಭಾಗ 4ರ (19) ನೋಡಿರಿ.] $i=1,2,\ldots,r$ಗೆ $c_i>0$ ಮತ್ತು $\sqrt{c_i}>0$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಹೀಗೆ 0 ಯು P ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿಲ್ಲ ಮತ್ತು Qನ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯೂ ಕೂಡ ಆಗಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ.

(14) P ಮತ್ತು Q ಗಳೆರಡೂ ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯಗಳಾಗಿವೆ.

$X\neq 0$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $PX\cdot X=Q^2X\cdot X=QX\cdot QX>0$. $QX\cdot QX>0$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು $QX\neq 0$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. P ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ, ಅಂದರೆ,

(15) $P = P^*$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಕೇವಲ P ಯು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ P ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(16) Q ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, ಕೇವಲ $P = Q^2$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ P ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ.

ಏಕೆಂದರೆ ಇದು ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದಂತಿದ್ದರೆ, ಆಗ $Q = Q^*$, $Q^2 = P$ ಮತ್ತು Q ನ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ. (15) ರಿಂದ Q ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ Q ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $P = Q^2$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $P = P^*$. Q ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ Q ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $X \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $QX \neq 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ $PX \cdot X = Q^2 X \cdot X = QX \cdot QX > 0$. ಇದು (16) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತದೆ.

(16) ರ Q ಇದು P ಯಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು P ಯು (13) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಡಲಿ. ಪದೋಕ್ತಿ (13) ರಲ್ಲಿ, $i \neq j$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $c_i \neq c_j$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. Q_1 ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರುವಲ್ಲಿ $P = Q_1^2$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ,

(17)
(a) $Q_1 = d_1F_1 + d_2F_2 + \cdots + d_kF_k$,
(b) $I = F_1 + F_2 + \cdots + F_k$,
(c) $F_iF_j = 0, \quad i \neq j$,
(d) $F_i^2 = F_i^* = F_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k$.

ಪದೋಕ್ತಿ (17)ರಲ್ಲಿ $i \neq j$ ಆಗಿದ್ದರೆ $d_i \neq d_j$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆಗ $Q_1^2 = d_1^2F_1 + d_2^2F_2 + \cdots + d_k^2F_k = P$. ನಾವು $i = 1, 2, \ldots, k$ ಗೆ $d_i > 0$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿರುವುದರಿಂದ $i \neq j$ ಆಗಿದ್ದರೆ $d_i^2 \neq d_j^2$. ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನ ಏಕೈಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $k = r$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು $i = 1, 2, \ldots, r$ ಗೆ $d_i^2 = c_i$, $F_i = E_i$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಮರು ಜೋಡಣೆಮಾಡಬಹುದು. ಹೀಗೆ $Q = Q_1$. ಇದು ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ,

(18) P ಯು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $Q^2 = P$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ Q ಇದೆ.

Q ಇದನ್ನು Pಯ **ಧನಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಮೂಲ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. Pಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ P ಯು ಉತ್ಪತ್ತಿ ಮಾಡುವ ಮತ್ತೊಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ನಾವು (X,Y) ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. (X,Y) ಇದನ್ನು $(X,Y)=PX\cdot Y$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. $PX\cdot Y=X\cdot PY=PY\cdot X$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $(X,Y)=(Y,X)$ ಇದೆ. $X\cdot Y$ ಯು ಈ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು Pಯು ರೇಖೀಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ (X,Y) ಯು ಸ್ಥಿರ Y ಗೆ X ನಲ್ಲಿ ರೇಖೀಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ X ಗೆ Y ನಲ್ಲಿ ರೇಖೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. $X\neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(X,X)=PX\cdot X>0$ ಆಗುವುದರಿಂದ (X,Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ಒಂದು ವಿಲೋಮವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(X,Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. X ಸ್ಥಿರವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $f(Y)$ ಯನ್ನು $f(Y)=X\cdot Y$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿ. ಆಗ f ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗುವುದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 16 ರಿಂದ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ Y ಗಳಿಗೆ $f(Y)=X'\cdot Y$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಸದಿಶ X' ಇದೆ. PX ಯು X' ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, ಆಗ P ಯು V ಯಿಂದ Vಗೆ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗುವಂತೆ X'ಯು X ನಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ

(19) $(X,Y)=PX\cdot Y$ ಇದು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Yಗಳಿಗೆ.

(19)ರಿಂದ $(aX^1+bX^2,Y)=P(aX^1+bX^2)\cdot Y=a(X^1,Y)+b(X^2,Y)=aPX^1\cdot Y+bPX^2\cdot Y$. ಇದರಿಂದ $(P(aX^1+bX^2)-(aPX^1+bPX^2))\cdot Y=0$. V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ Y ಗಳಿಗೆ ಅದರಲ್ಲೂ $Y=P(aX^1+bX^2)-aPX^1-bPX^2$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಇದು $P(aX^1+bX^2)-aPX^1-bPX^2=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. P ಯು ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. $(X,Y)=(Y,X)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $PX\cdot Y=PY\cdot X=X\cdot PY$. ಆದ್ದರಿಂದ P ಯು $X\cdot Y$ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ. $X\neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $(X,X)>0$ ಮತ್ತು $(X,X)=PX\cdot X$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು P ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

P_1 ಯು $(X;Y)=P_1X\cdot Y$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Yಗಳಿಗೆ $(PX-P_1X)\cdot Y=0$. ಹೀಗೆ $(PX-P_1X)(PX-P_1X)=0$, ಅಂದರೆ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಳಿಗೆ $PX=P_1X$.

(20) $X\cdot Y$ ಮತ್ತು (X,Y) ಗಳು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Yಗಳಿಗೆ $(X,Y) = PX\cdot Y$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಏಕೈಕ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ P ಯು Vಯು ಮೇಲಿದೆ. ಇದಲ್ಲದೆ P ಯು X,Yಗಾದರೂ ಅಥವಾ (XY)ಗಾದರೂ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ $X\cdot Y$ಯು Vಯು ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು P ಯು $X\cdot Y$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(X;Y)=PX\cdot Y$ ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತದೆ.

P ಯು (X,Y) ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇನ್ನೂ ತೋರಿಸಿಲ್ಲ. P ಯು $X\cdot Y$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, (14) P ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ $X\neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $PX\neq 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ $(PX,X)=P^2X\cdot X=PX\cdot PX>0$.

P ಯು $(X\cdot Y)$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಸಾಧನೆಗೆ (10) *ff* ನೋಡಿರಿ.

ಟೀಕೆಗಳು : ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾತೃಕೆ ರೂಪಕ್ಕೆ ರೂಪಾಂತರಿಸಬಹುದು $X\cdot Y$ ಯು R^n ಮೇಲಿನ ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸಲಿ. R ಅನ್ನು ನೀಟಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಗಳಂತೆ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, $X\cdot Y = Y^tX$. $X\neq 0$ ಗೆ $AX\ X>0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ $X\neq 0$ ಗೆ, $X^tAX>0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಒಂದು ಸಮಾಂಗ $n\times n$ ಮಾತೃಕೆ Aಯನ್ನು ಒಂದು **ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತ** ಮಾತೃಕೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

(X,Y) ಮತ್ತು $X\cdot Y$ ಗಳು (16) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇರಲಿ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು $X\cdot Y$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. $(X,Y)=PX\cdot Y$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು A ಯು

$\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ P ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. P ಯು $X \cdot Y$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸಮಾಂಗವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $A = A^t$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಇಷ್ಟಲ್ಲದೆ, $i = 1, 2, \ldots, n$ ಮತ್ತು $j = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ $A_{ij} = PX^j X^i$ [ಅಧ್ಯಾಯ 2 ರ ಭಾಗ 5ರ (11) ನೋಡಿರಿ.] $PX^j \cdot X^i = (X^j, X^i)$ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $i = 1, 2, \ldots, n$ ಮತ್ತು $j = 1, 2, \ldots, n$ಗೆ $A_{ij} = (X^j, X^i)$. ಈ ಕಾರಣದಿಂದ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ A ಯನ್ನು $X \cdot Y$ಗೆ ಮತ್ತು **ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ (X, Y)ನ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ** ($X \cdot Y$ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸಮಲಂಬೀಯ)

$X = x_1X^1 + x_2X^2 + \cdots + x_nX^n$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $PX = x_1PX^1 + x_2PX^2 + \cdots + x_nPX^n$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$PX \cdot X = (x_1 x_2 \cdots x_n)\, A \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

$PX \cdot X > 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, A ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ A ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು P ಯು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರಕ್ಕೆ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ($X \cdot Y$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸಮಲಂಬೀಯ) ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ A ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ, Vಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ P ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ. $(X, Y) = PX \cdot Y$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ Aಯು $X \cdot Y$ ಮತ್ತು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ (X, Y)ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು $X = x_1X^1 + x_2X^2 + \cdots + x_nX^n$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$$PX \cdot X = (x_1 x_2 \cdots x_n)\, A \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

ಆಗುವುದರಿಂದ $X \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $PX \cdot X > 0$. A ಯು ಸಮಾಂಗವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದು P ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರುತ್ತದೆ. ಉಳಿದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತವೆ,

$$A_{ij} = PX^j \cdot X^i = (X^j, X^i), \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು ಮತ್ತು ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಂಚ ಹೆಚ್ಚು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯೊಂದಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ $P=P^*$ ಮತ್ತು $PX\cdot X\geq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ P ಯು **ಧನಾತ್ಮಕ ಅರ್ಧ ನಿಶ್ಚಿತ**ವಾಗಿದೆ ಅಥವಾ **ನಾನ್ನೃಣಾತ್ಮಕ**ವಾಗಿದೆ. ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. (15), (16) ಮತ್ತು (18) ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಉದ್ದಕ್ಕೂ 'ಧನಾತ್ಮಕ'ವಾದುದಕ್ಕೆ 'ನಾನ್ನೃಣಾತ್ಮಕ' ಎಂದು ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸಿದರೆ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆಯೂ ಇಲ್ಲದೆ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತವೆ. $n\times n$ ಮಾತೃಕೆ A ಯು $A=A$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ $n\times 1$ ಮಾತೃಕೆ X ಗಳಿಗೆ $X'AX\geq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕ ಅರ್ಧನಿಶ್ಚಿತ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ (15), (16) ಮತ್ತು (18) ರ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪಗಳು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.

(21) $A=A'$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಕೇವಲ A ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು >0 (≥ 0) ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ A ಯು ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತ (ಅರ್ಧನಿಶ್ಚಿತ) ಆಗಿದೆ. ಕೇವಲ $A=B^2$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತ (ಅರ್ಧನಿಶ್ಚಿತ) ಮಾತೃಕೆ B ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ A ಯು ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತ (ಅರ್ಧನಿಶ್ಚಿತ) ಆಗಿದೆ. ಮಾತೃಕೆ B ಯು A ಯಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಅಧ್ಯಾಯ 3 ರ ಭಾಗ 4 ರ, ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಮಾತೃಕೆ ರೂಪಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು ಅಥವಾ ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಮಾತೃಕೆ ರೂಪಗಳಂತೆ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. $X.Y$ ಯು R^2 ಮೇಲಿನ ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು (X, Y) ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ (X, Y) ಯು R^2 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು $(X, Y)=PX\cdot Y$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ P ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $X=(x_1, x_2)$ ಮತ್ತು $Y=(y_1, y_2)$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

   (a) $(X,Y)=x_1y_1+(x_1+x_2)(y_1+y_2)$

(b) $(X, Y) = 3x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2$

(c) $(X, Y) = 100x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1$

2. ಅಭ್ಯಾಸ 1ರ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು $X \cdot Y$ಗೆ ಮತ್ತು $\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\}$ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ (X, Y) ನ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. A ಯು ಒಂದು ಸಮಾಂಗ 2×2 ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿರಲಿ. ಕೇವಲ $A_{11} > 0$ ಮತ್ತು $det(A) > 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ A ಯು ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಕೇವಲ $A_{11} \geq 0$ ಮತ್ತು $det(A) \geq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ A ಯು ಧನಾತ್ಮಕ ಅರ್ಧನಿಶ್ಚಿತ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : $A_{11} < 0$ ಅಥವಾ $det(A) < 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $X'AX < 0$ ಆಗಿರಬಹುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

4. (a) P ಯು ಧನಾತ್ಮಕ ಅರ್ಧನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿರುವಂತೆ P ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. ಕೇವಲ P ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ P ಯು ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : (15) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

   (b) T ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. T^*T ಮತ್ತು TT^* ಗಳೆರಡೂ ನಾನ್ಋಣಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

   (c) ಕೇವಲ T ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T^*T ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

5. P ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ನಾನ್ಋಣಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. k ಯು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ $\geq$ ಆಗಿರಲಿ. $Q^k = P$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಏಕೈಕ ನಾನ್ಋಣಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ Q ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : P ಯು (13) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ಆಗ $i = 1,2,\ldots,r$ ಗೆ $c_i \geq 0$. $Q = c_1^{1/k}E_1 + c_2^{1/k}E_2 + \cdots + c_r^{1/k}E_r$ ಆಗಿರಲಿ. Q ನ ಏಕೈಕತೆಯ ಸಾಧನೆಯು (18) ರ ಸಾಧನೆಗೆ ಸದೃಶವಾಗಿದೆ.]

6. ಕೆಳಗಿರುವ A ಮಾತೃಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ A ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಿಂದ Aಯು ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(a) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ -9 & -9 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

7. ಕೆಳಗಿರುವ A ಮಾತೃಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ $B^2 = A$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಅರ್ಧನಿಶ್ಚಿತ ಮಾತೃಕೆ B ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : $P^{-1}AP_0$ ಯು ಕರ್ಣರೇಖೀಯವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಮಾತೃಕೆ P_0 ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.]

(a) $\begin{bmatrix} 6 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -1 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

8.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ಎಂದಿರಲಿ

A ಯು ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದೂ, $B^2 = A$ ಎಂದು ಮತ್ತು B ಯು A ಯ ಧನಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಮೂಲ ಅಲ್ಲ ಎಂದೂ ತೋರಿಸಿರಿ. $c \neq c'$ ಮತ್ತು $c^2 = A$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆ c ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ?

9. (a) ಎಲ್ಲ 2×1 ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ $X \neq 0$, $X'AX > 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ, ಆದರೂ A ಯು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾತೃಕೆ ಅಲ್ಲದೆ ಇರುವಂತೆ ಒಂದು 2×2 ಮಾತೃಕೆ A ಯ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿ.

(b) ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಶ್ಚಿತ ಅಲ್ಲದ, ಆದರೂ ತನ್ನ ಎಲ್ಲ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು > 0 ಆಗಿರುವ ಒಂದು 2×2 ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಮಾತೃಕೆ A ಯ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿರಿ.

10. (a) P ಮತ್ತು Q ನಾನ್ಯಣಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $a \geq 0$ ಮತ್ತು $b \geq 0$ ಗೆ $aP + bQ$ ಯು ನಾನ್ಯಣಾತ್ಮಕ

ವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : $aP+bQ$ ಯು ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ].

(b) P ಮತ್ತು Q ನಾನ್ನೃಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $PQ=QP$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ PQ ಯು ನಾನ್ನೃಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : ಪ್ರಮೇಯ 23 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಥವಾ ನೇರವಾಗಿ PQ ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಮತ್ತು P Q ಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು ವ್ಯತ್ಯಯಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

(c) A ಮತ್ತು B ಎರಡು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು, ಎರಡೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತು AB ಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. (a) T ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. $T=P-Q, T, P$ ಮತ್ತು Q ವ್ಯತ್ಯಯಿಸುವಂತೆ ಮತ್ತು $PQ=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯ ಮೇಲೆ ನಾನ್ನೃಣಾತ್ಮಕ ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು P ಮತ್ತು Q ಇವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : ಪ್ರಮೇಯ 20 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ $T=c_1E_1+c_2E_2+\cdots+c_rE_r$ ಆಗಿದ್ದರೆ $c_i>0$ ಆಗಿರುವ ಆ c_iE_i ಗಳ ಮೊತ್ತವು P ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $-Q$ಯು $c_i>0$ ಆಗಿರುವ ಆ c_iE_i ಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರಲಿ.]

(b) T, P ಮತ್ತು Q ಗಳು (a) ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು T, P_1 ಮತ್ತು Qಗಳು ವ್ಯತ್ಯಯಿಸುವಂತೆ ಮತ್ತು $P_1Q_1=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ P_1 ಮತ್ತು Q_1 ಗಳ ನಾನ್ನೃಣಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಾಗಿರುವಲ್ಲಿ $T=P_1-Q_1$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $P=P_1$ ಮತ್ತು $Q=Q_1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : (a) ಯ $c_1, c_2, \ldots, c_r$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ P_1 ಮತ್ತು Q_1 ಮೇಲಿನ ನಿರ್ಬಂಧಗಳು, $c_i>0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಆ c_iE_i ಗಳ ಮೊತ್ತವು P_1 ಆಗಿರಲೇಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನಿಬಂಧಿಸಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಇದನ್ನು ಮಾಡಲು ಪ್ರಮೇಯ 20 ಸಹಾಯಕವಾಗಬಹುದು.]

ಈ ಭಾಗದ ಉಳಿದ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕಿಂತ ಕೊಂಚ ಹೆಚ್ಚು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯಾದ ದ್ವಿರೇಖಾತ್ಮಕ ರೂಪದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿವೆ. ಈ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ V ಯು $X\cdot Y$ ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಡನೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಗೃಹಿಸಿದೆ.

V ಯು ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು **ದ್ವಿರೇಖಾತ್ಮಕ ರೂಪವು** V ಯಲ್ಲಿರುವ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಮತ್ತು $h(aX^1+bX^2,Y)=ah(X^1,Y)+bh(X^2,Y)$ ಮತ್ತು $h(X,aY^1+bY^2)=ah(X,Y^1)+bh(X,Y^2)$ ಅನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನವು $h(X,Y)$ ಆಗಿದೆ.

12. $h(X,Y)$ ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ದ್ವಿರೇಖಾತ್ಮಕ ರೂಪವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $h(X,Y)=TX\cdot Y$ ಆಗಿರುವಂತೆ, V ಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ T ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ:** (8) ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಪ್ರಮೇಯ 16 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ. ಒಂದು ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನವು V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಆಗಿರಲು ಬಿಡುವುದು, A ಯನ್ನು $A_{ij}=h(X^j,X^i)$ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ $n\times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲು ಬಿಡುವುದು ಮತ್ತು T ಯನ್ನು ತನ್ನ ಮಾತೃಕೆ A ಯನ್ನು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲು ಬಿಡುವುದು.ಆಗಿದೆ. ಮಾತೃಕೆ Aಯು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿರುವಂತೆ hನ **ಮಾತೃಕೆ** ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.]

13. $h(X,Y)=TX\cdot Y$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, ಕೇವಲ $T=T^*$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ $h(X,Y)=h(Y,X)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ:** ಅಭ್ಯಾಸ 12 ರಲ್ಲಿರುವ ಮಾತೃಕೆ A ಯು ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಸಮಾಂಗ ಆಗಿದೆ]

14. V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ $h(X,Y)=h(Y,X)$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $X=x_1X^1+x_2X^2+\cdots+x_nX^n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $h(X,X)=c_1x_1^2+c_2x_2^2+\cdots+c_n$

X_n^2 ಆಗಿರುವಂತೆ, ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : ಅಭ್ಯಾಸ 13 ನ್ನು ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 22ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

15. (a) R^n ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ರೂಪವು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನ $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{(n-1)n}x_{n-1}x_n$ ಆಗಿದೆ. $h(X, Y) = h(Y, X)$ ಮತ್ತು $h(X, X) = g(X)$ ಆಗಿರುವಂತೆ R^n ಮೇಲೆ ಒಂದು ದ್ವಿರೇಖಾತ್ಮಕ ರೂಪ $h(X, Y)$ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : $i = 1, 2, \ldots, n$ ಮತ್ತು $j > i$ ಆಗಿದ್ದರೆ $A_{ij} = A_{ji} = a_{ij}/2$ ಗೆ $A_{ii} = a_{ii}$ ನಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ A ಆಗಿರಲಿ. T ಯು ತನ್ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿ A ಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ R^n ಮೇಲಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $h(X, Y) = TX \cdot Y$ ಯು R^n ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗುಣಲಬ್ಧ ಆಗಿರಲಿ.]

(b) k ಯು ದ್ವಿರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ, $k(X, Y) = k(Y, X)$ ಮತ್ತು $k(X, X) = g(X)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ $k(X, Y) = h(X, Y)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : $k(X, Y) = \frac{1}{4}g(X + Y) - \frac{1}{4}g(X - Y) = h(X, Y)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

16. (a) ಕೇವಲ $a > 0$ ಮತ್ತು $b^2 - ac > 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $ax_1^2 + abx_1x_2 + cx_2^2 = 1$ ಯು ಒಂದು ದೀರ್ಘ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : $g(x_1x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ ಆಗಿರಲಿ; ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 14 ಮತ್ತು 15 ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿರಿ.]

(b) ಕೇವಲ $a > 0$ ಮತ್ತು $b^2 - ac > 0$ ಅಥವಾ $a < 0$ ಮತ್ತು $b^2 - ac < 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$

$=1$ ಯು ಒಂದು ಅತಿ ಪರವಲಯದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಭಾಗ 3. ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು

ಅಧ್ಯಾಯ 3 ರ ಭಾಗ 4 ರಲ್ಲಿ ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸಿದೆವು. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅನಂತರ ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಎರಡು ಮತ್ತು ಮೂರು ಆಯಾಮ ಪ್ರಸಂಗಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾಲ್ಕು ಆಯಾಮದ ಪ್ರಸಂಗದಂತಹ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಒಳಗೊಂಡಿವೆ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ದೃಢ ಚಲನೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

V ಯು (X,Y) ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಡನೆ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $P^* = P^{-1}$ ಆಗಿದ್ದರೆ V ಯ ಮೇಲಿನ ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿ P ಇದನ್ನು ಒಂದು **ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿ** ಎಂದು ಕರೆಯುವುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಒಂದು $n \times n$ ಮಾತೃಕೆ P_0 ವನ್ನು $P_0' = P_0^{-1}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಒಂದು **ಲಂಬೀಯ ಮಾತೃಕೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. [ಅಧ್ಯಾಯ 3 ರ ಭಾಗ 4 ರ (4.3) ff ನೋಡಿರಿ.]

$P_0 = (P_{ij})$ ಯು ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $P'_0 P_0 = I$.

(1) $$P_{1j}P_{1j} + P_{2j}P_{2j} + \cdots + P_{nj}P_{nj} = 1, \qquad j = 1,2,\ldots,n,$$

ಮತ್ತು

(2) $$P_{1j}P_{1i} + P_{2j}P_{2i} + \cdots + P_{nj}P_{ni} = 0, \qquad i \neq j.$$

$i \neq j$ ಮತ್ತು $\delta_{ii} = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\delta_{ij} = 0$ ಎಂಬ ಅಂಕಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ನಾವು ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪುನಃ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು :

(3) $P_0 = (P_{ij})$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $P_0'P_0 = I$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವೂ $i = 1,2,\ldots,n$ ಮತ್ತು $j = 1,2,\ldots,n$ ಗೆ $P_{1j}P_{1i} + P_{2j}P_{2i} + \cdots + P_{nj}P_{ni} = \delta_{ij}$ ಎನ್ನುವುದೂ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ.

ಕೇವಲ $P_0P_0' = I$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $P'_0P_0 = I$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ (ಪ್ರಮೇಯ 10 ರಿಂದ) ಮುಂದಿನಂತಿದೆ,

(4) ನಿರ್ಬಂಧಗಳು $i=1,2,\ldots,n$ ಮತ್ತು $j=1,2,\ldots,n$ ಗೆ $P_{i1}P_{j1} + P_{i2}P_{j2} + \cdots + P_{in}X_{jn} = \delta_{ij}$ ಎನ್ನುವುದೂ ಮತ್ತು $P_0 = (P_{ij})$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $P_0'P_0 = I$ ಎನ್ನುವುದೂ ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ.

(3) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿರ್ಬಂಧವು P_0ನ ನೀಟಸಾಲುಗಳು ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿವೆ, ಎಂಬುದಾಗಿದ್ದರೆ (4) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿರ್ಬಂಧವು P_0ನ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ. ಇದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲೂ R^n ಮೇಲಿರುವ ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿದೆ.

P ಯು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ (X, Y) ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ರೇಖೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. P_0ಯು V ಗೆ ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ P ಯ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ P_0 ಯು ಈ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ P^*ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $P^*P = I$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವೂ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

(5) P ಯು ಸಮಲಂಬೀಯುವಾಗಿರುವುದು ಕೇವಲ ಅದರ ಮಾತೃಕೆಯು ಯಾವುದಾದರೂ ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಲಂಬೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

$\dim V = 2$ ಎಂದು ಮತ್ತು $\{X^1, X^2\}$ ಯು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ (X, Y) ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. Pಯು $\{X^1, X^2\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ತನ್ನ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿರುವಂತೆ ಹೊಂದಿರುವ, V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

ಆಗ (3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ P_0 ಯು ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿದೆ ಎಂದ ತೀರ್ಮಾನಿಸುವುದರಿಂದ, (5) ರಿಂದ P ಯು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ (X, Y) ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ.

$X = x_1X^1 + x_2X^2$ ಮತ್ತು $Y = y_1X^1 + y_2X^2$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ

$$PX = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} X^1 + \frac{-x_1 + x_2}{\sqrt{2}} X^2.$$

ಮತ್ತು

$$PX = \frac{y_1 + y_2}{\sqrt{2}} X^1 + \frac{-y_1 + y_2}{\sqrt{2}} X^2.$$

$$(PX, PY) = \frac{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}{2} + \frac{(-x_1 + x_2)(-y_1 + y_2)}{2}$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 = (X, Y).$$

ಈ ಸಾಮ್ಯಕಗಳು $\{X^1, X^2\}$ ಯು (X, Y) ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಫಲವಾಗುತ್ತವೆ.

(6) $(PX, PY) = (X, Y)$ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ.

ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಇದು $(PX, PX) = (X, X)$ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ;

(7) $|PX| = |X|$.

ಇದು P ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. $X \neq 0$ ಮತ್ತು $Y \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (6) ಮತ್ತು (7) ರ ಸಂಯುಕ್ತದಿಂದ ಈ ಫಲಿತಾಂಶ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ,

$$\frac{(X, Y)}{|X||Y|} = \frac{(PX, PY)}{|PX||PY|},$$

ಅಂದರೆ,

(8) P ಯು ಎರಡು ಸದಿಶಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನದ ಕೋಟಿಜ್ಯಾವನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು $P^* = P^{-1}$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧ ಒಂದನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನೇರವಾಗಿ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಬಹುದು. V ಯು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ (X, Y) ಯೊಡನೆ ಒಂದು ಸಾಂತ ಆಯಾಮೀಯ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ ಎಂದು ಮತ್ತು P ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮ ಎಂದೂ ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಮುಂದಿರುವುದು ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾಗಿವೆ.

(a) $P^* = P^{-1}$.

(b) $P^*P = I$.

(9) (c) $PP^* = I$.

(d) $(PX, PY) = V$ ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ.

(e) $|PX| = |X|$ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ.

($9a,b,c$) ಯ ಸಮಾನಾರ್ಥಕತೆಯು ಪ್ರಮೇಯ 10 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. $P^*P = I$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $(PX, PY) = (P^*PX, Y) = (X, Y)$ ಆಗುವುದರಿಂದ ($9b$) ಯು ($9d$) ಯನ್ನು ನಿಬಂಧಿಸಿದೆ. ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ $(PX, PY) = (X, Y)$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $P^*P(X, Y) = (X, Y)$ ಆಗುವುದರಿಂದ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ $((P^*P - I)X, Y) = 0$. ವಿಶೇಷವಾಗಿ $Y = (P^*P - I)X$ ಆಗಿರಲು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ $(P^*P - I)X = 0$. ಹೀಗೆ $P^*P = I$. ಇದು ($9b$) ಮತ್ತು ($9d$) ಯ ಸಮಾನಾರ್ಥಕತೆಯನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತದೆ.

($9d$) ಸಫಲವಾದರೆ, ಆಗ ವಿಶೇಷವಾಗಿ, $(PX, PX) = (X, X)$ ಆಗುವುದರಿಂದ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ $|PX| = |X|$. ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ $|XP| = |X|$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ $|PX|^2 = |X|^2$. ಈಗ ಧ್ರುವೀಕರಣ ಸಾಮ್ಯಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. [ನೋಡಿ ಅಧ್ಯಾಯ 2, ಭಾಗ 2 ರ (13)]

$$
\begin{aligned}
|PX, PY| &= \tfrac{1}{4}|PX + PY|^2 - \tfrac{1}{4}|PX - PY|^2 \\
&= \tfrac{1}{4}|P(X + Y)|^2 - \tfrac{1}{4}|P(X - Y)|^2 \\
&= \tfrac{1}{4}|X + Y|^2 - \tfrac{1}{4}|X - Y|^2 \\
&= (X, Y).
\end{aligned}
$$

ಇದು ($9e$) ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ($9d$) ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು (9) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಏಕೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಯು (9) ರ ಯಾವುದೇ ನಿರ್ಬಂಧಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡಬಹುದಾದಂತೆಯೇ (5) ರ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡಬಹುದು

ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಉಪಯುಕ್ತ ನಿರ್ಬಂಧವು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ,

(10) ಕೇವಲ P ಯು ಸಮಲಂಬೀಯ ಗಣಗಳನ್ನು ಸಮಲಂಬೀಯ ಗಣಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ ಮಾತ್ರ, Pಯು ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ $\{PX^1, PX^2, \ldots, PX^k\}$ ಯು $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿರುವಾಗಲೆಲ್ಲ ತಾನೂ ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿದೆ.

P ಯು ಲಂಬೀಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $(9d)$ ಯಿಂದ $1 \leq i \leq k$ ಮತ್ತು $1 \leq j \leq k$ ಗೆ $(PX^i, PX^j) = (X^i, X^j) = \delta_{ij}$. ಬೇರೆ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ, $\{PX^1, PX^2, \ldots, PX^k\}$ ಯು ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿದೆ. ಈಗ Pಯು ಸಮಲಂಬೀಯ ಗಣಗಳನ್ನು ಸಮಲಂಬೀಯ ಗಣಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು i ಮತ್ತು j ಗೆ $(P^*PX^i, X^j) = (PX^i, PX^j) = \delta_{ij} = (X^iX^j) = (IX^i, X^j)$. ರೇಖೀಯತೆಯಿಂದ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ $(P^*PX, Y) = (IX, Y)$. ಅಧ್ಯಾಯ 2 ರ, ಭಾಗ 5 ರ, (10) ರಿಂದ $P^*P = I$. $(9b)$ಯಿಂದ P ಯು ಲಂಬೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಇದು (10) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಟೀಕೆಗಳು : $(9b)$ ಮತ್ತು $(9c)$ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಅನಂತ ಆಯಾಮೀಯ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತವೆ. ಇದು $(9d)$ ಮತ್ತು $(9e)$ ಯನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ ಅನಂತ ಆಯಾಮದ ಸದಿಶ್ಟಗಳ ಮೇಲೆ ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿಗೆ ಮಿತಿಗೊಳಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಮತ್ತು ಬಹುಭಾಗ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಪ್ರಭಾವ ಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಗಳು ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿರುವ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೂ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತವೆ. V ಯ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ (X, Y) ಇದೆ ಎನ್ನಿ ಮತ್ತು W ವು ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ $\{X^1, Y^1\}$ ಇದನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. P ಯು V ಯಲ್ಲಿಯ

ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ $\{PX, PY\} = (X, Y)$ ಆಗಿರುವಂತೆ Wಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ V ಯ ಒಂದು ಪ್ರತಿಬಿಂಬನ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ P ಯು W ಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ V ಯ ಒಂದು **ಲಂಬೀಯ** ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. (9) ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಂತಹದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $|PX|^2 = \{PX \cdot PX\}$ ಮತ್ತು $|X|^2 = |X \cdot X|$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $\{PX, PY\} = (X, Y)$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವೂ ಮತ್ತು $|PX| = |X|$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವೂ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ. ಈ ಕಾರಣಕ್ಕಾಗಿ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ಒಂದು **ಸಮಮಾನಪರಿಮಾಣದ ' ಸಮಾನಾಕೃತಿತ್ವ** ಅಥವಾ **ಸಮಮಾನಪರಿಮಾಣತ್ವ** ಎಂದು ಕೆಲವು ಬಾರಿ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$\dim V = \dim W = n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ Wಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ V ಯ ಒಂದು ಸಮಾನ ಪರಿಮಾಣತ್ವವನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ರಚಿಸಬಹುದು. $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $\{Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\}$ ಯು W ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. P ಯು $i = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ $PX^i = Y^i$ ನಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ Wಗೆ ವ್ಯಾಪಿಯಾದ V ಯ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಪ್ರಮೇಯ 11 ರಿಂದ P ಯು ಒಂದು ಪ್ರತಿಬಿಂಬನ ಆಗಿದೆ. $X = x_1 X^1 + x_2 X^2 + \cdots + x_n X^n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $PX = x_1 Y^1 + x_2 Y^2 + \cdots + x_n Y^n$. ಹೀಗೆ $|PX|^2 = \{PX, PX\} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = (X, X) = |X|^2$ ಆಗುವುದರಿಂದ P ಯು ಒಂದು ಸಮಾನ ಪರಿಮಾಣತ್ವ ಆಗಿದೆ.

ವಿವಿಧ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಮೇಲಿನ ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗಿರುವ ಎರಡು ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿದೆ,

(11) P ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು c ಯು P ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $|c| = 1$.

(12) P ಯು ಲಂಬೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $\det(P) = \pm 1$

$c \neq 0$ ಯೊಡನೆ $PX = cX$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $(PX, PX) = c^2(X, X)$, ಆಗುವುದರಿಂದ $c^2 = 1$. ಇದು (11) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ. (12) ಗುಣಧರ್ಮವು $\det(P) = \det(P^*)$ ಮತ್ತು $1 = \det(I) = \det(P^* P) = \det(P^*) \det(P)$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ 2 ಮತ್ತು 3 ಆಯಾಮಗಳಿಗೆ ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ. $dim\ V = 2$ ಎಂದು ಮತ್ತು V ಯು (X, Y) ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. P ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\{X^1, X^2\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ ಆಗಿರಲಿ.

$$P_0 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ಇದು}$$

$\{X^1, X^2\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷನಾಗಿ P ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$P_0^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

ಆಗುವುದರಿಂದ ನಿರ್ಬಂಧಗಳು $P_0{}^t P_0 = I$. (5) ಮತ್ತು (1) ರಿಂದ ಮತ್ತು $det\ (P) = ad - bc = \pm 1$, (12) ರಿಂದ,

(13) $$P_0 = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad det\ (P_0) = 1 \text{ ಆಗಿದ್ದರೆ;}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \quad det\ (P_0) = 1 \text{ ಆಗಿದ್ದರೆ;}$$

ಗುಣಧರ್ಮ (1), $a^2 = b^2 = 1$ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿಂದ $0 \le \theta \le 2\pi$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಸಂಖ್ಯೆ θ ಇದೆ ಮತ್ತು

(14) $$P_0 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad det\ (P_0) = 1 \text{ ಆಗಿದ್ದರೆ,}$$

(15) $$P_0 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \quad det\ (P_0) = 1 \text{ ಆಗಿದ್ದರೆ.}$$

ಇವು, $det\ (P_0) = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ P ಯು ಕೋನ θ ದಷ್ಟು ಆವರ್ತನೆ ಆಗಿದೆ ಎಂದೂ ಮತ್ತು $det\ (P) = -1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ P ಯು θದಷ್ಟು ಆವರ್ತನೆಯಿಂದ ಹಿಂಬಾಲಿಸಲ್ಪಟ್ಟ X^1 ಅಕ್ಷದಷ್ಟು ಪ್ರತಿಫಲನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

$dim\ V = 3$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು P ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ P ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿಯು 3 ಸ್ತರದ್ದಾಗಿದೆ.

ಹೀಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬಹುಪದಿಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೂಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ (ನೋಡಿ, ಅಧ್ಯಾಯ 3, ಭಾಗ 2, ಅಭ್ಯಾಸ 4.) ಇದು P ಯು ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆ c ಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. (11) ರಿಂದ $c=\pm 1$ ಎಂದು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. $X\neq 0$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $PX=cX$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $X^1=X/|X|$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$PX^1=cX^1 \text{ ಮತ್ತು } (X^1,\ X^1)=1.$$

$\{X^1,\ X^2,\ X^3\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿರುವಂತೆ X^2 ಮತ್ತು X^3 ಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿ. P_0 ಯು ಈ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ P ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ.

$$P_0=\begin{bmatrix} c & P_{12} & P_{13} \\ 0 & P_{22} & P_{23} \\ 0 & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

(1) ರಿಂದ $c^2+P_{12}^2+P_{13}^2=1$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. $c=\pm 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $P_{12}=P_{13}=0$ ಎಂದು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. (1) ರಿಂದ ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ;

$$P^2_{22}+P^2_{33}=P^2_{32}+P^2_{23}=1 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad P_{22}P_{23}+P_{32}P_{33}=0.$$

ಹೀಗೆ

$$\begin{bmatrix} P_{22} & P_{23} \\ P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \text{ ಯು}$$

ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. (14) ಮತ್ತು (15) ರ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿಯಂತೆ, $0\leq\theta\leq 2\pi$ ಯೊಡನೆ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಸಂಖ್ಯೆ θ ಇದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\begin{bmatrix} P_{22} & P_{23} \\ P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

(17) ಅಥವಾ

$$\begin{bmatrix} P_{22} & P_{23} \\ P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

ನಾವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ ಕೆಳಗಿನ :

(18) $det\ (P) = 1$ ಮತ್ತು $c = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(19) $det\ (P) = 1$ ಮತ್ತು $c = -1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$P_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

(20) $det\ (P) = -1$ ಮತ್ತು $c = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

(21) $det\ (P) = -1$ ಮತ್ತು $c = -1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$P_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಒಂದು ಸರಳ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. $det\ (P) = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (18) ರಿಂದ P ಯು X^1– ಅಕ್ಷವನ್ನು ಬಿಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, 0 ಮತ್ತು X^1 ಮೂಲಕ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಈ ಅಕ್ಷದ ಸುತ್ತ θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ. ಉಕ್ತಿ (19) ನಮಗೆ P ಯು X^2–ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಫಲಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅನಂತರ X^1– ಅಕ್ಷದ ಸುತ್ತ θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. $det\ (P) = -1$ ಆಗಿರುವಾಗ, ಆಗ (20) ನಮಗೆ P ಯು X^1– ಮತ್ತು X^2– ಅಕ್ಷಗಳ ಸಮತಲದ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿಫಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದೂ ಅನಂತರ X^1– ಅಕ್ಷದ ಸುತ್ತ θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದೂ ಹೇಳಿದರೆ, (21) ನಮಗೆ P ಯು X^2 ಮತ್ತು X^3– ಅಕ್ಷಗಳ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಫಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದೂ, ಅನಂತರ X^1– ಅಕ್ಷದ ಸುತ್ತ θ ಕೋನದ ಮೂಲಕ ಆವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದೂ ಹೇಳುತ್ತದೆ.

ಟೀಕೆಗಳು : ಉನ್ನತತರ ಆಯಾಮಗಳ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ಎರಡು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ,

(22) P ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. M ಯು P ಗೆ ಒಂದು ನಿಶ್ಚರ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. X ಯು M ನಲ್ಲಿರುವಾಗಲೆಲ್ಲ PX ಯು M ನಲ್ಲಿದೆ. ಆಗ M ಕೂಡ P^* ಗೆ ಒಂದು ನಿಶ್ಚರ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

(23) P, V ಮತ್ತು M ಗಳು (22) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇವೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. P_1 ಯು M ಗೆ P ಯ ಮಿತಿಯಾಗಿರಲಿ; ಅಂದರೆ P_1 ಯು M ನಲ್ಲಿರುವ X ಗೆ $P_1X = PX$ ನಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ M ಮೇಲಿನ ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಆಗಿದೆ. Q_1 ಯು M ಗೆ P^* ನ ಮಿತಿಯಾಗಿರಲಿ, ಆಗ P_1 ಯು M ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು $P_1^* = Q_1$.

(22) ಮತ್ತು (23) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಯು M ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. M ಯು P ಗೆ ನಿಶ್ಚರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $i = 1, 2, \ldots, k$ ಗೆ, PX^i ಯು M ನಲ್ಲಿದೆ ಎಂದಾಗಿದೆ. (10) ರಿಂದ $\{PX^1, PX^2, \ldots, PX^k\}$ ಯು ಕೂಡ M ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. X ಯು M ನಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $X = a_1 PX^1 + a_2PX^2 + \cdots + a_kPX^k$ ಆಗುವುದರಿಂದ $P^*X = a_1P^*PX^1 + a_2P^*PX^2 + \cdots + a_kP^*PX^k = a_1X^1 + a_2X^2 + \cdots = a_kX^k$, ಇದು M ನಲ್ಲಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು $P^* = P^{-1}$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆವು. ಇದು (22) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ. X ಮತ್ತು Y ಗಳು M ನಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ $P_1X = PX$ ಮತ್ತು $P_1Y = PY$ ಗಳು M ನಲ್ಲಿವೆ. (9d) ಇದರಿಂದ $(P_1X, P_1Y) = (PX, PY) = (X, Y)$ ಆಗುವುದರಿಂದ P_1 ಯು M ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಎಂದು (9) ಹೇಳುತ್ತದೆ. M ನಲ್ಲಿರುವ Y ಗೆ $Q_1Y = P^*Y$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, M ನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ $(P_1X, Y) = (PX, Y) = (X, P^*, Y) = (X, Q_1 Y)$ ಎಂದು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಇದು (23) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು P ಯು ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು $\{X^1, X^2, \ldots, X^k, X^{k-1}, \ldots, X^n\}$ ಯು M ಗೆ ಒಂದು

ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವು $\{X^1, X^2, \ldots, X^k\}$ ಆಗಿರುವಂತೆ, V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಪ್ರಮೇಯ 15 ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿಯಂತೆ $M^{\perp}$ಗೆ $\{X^{k+1}, X^{k+2}, \ldots, X^n\}$ಯು ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. $P_0=(P_{ij})$ ಯು $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ P ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $i,j=1, 2, \ldots, n$ ಗೆ, $P_{ij}=(PX^j, X^i)$. M ಯು P ಯ ಕೆಳಗೆ ನಿಶ್ಚರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $1 \le j \le k$ ಗೆ PX^jಯು M ನಲ್ಲಿದೆ. ಹೀಗೆ $j \le k$ ಮತ್ತು $i > k$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $P_{ij}=(PX^j, X^i)=0$ P_0'ಯು ಈ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ P^*ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ $j>k$ ಮತ್ತು $i \le k$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $P_{ji}=(P^*X^j, X^i)=(X^j, PX^i)=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ

$$(24) \quad P_0=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12}\cdots P_{1k} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ P_{21} & P_{22}\cdots P_{2k} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ P_{k1} & P_{k2}\cdots P_{kk} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 & P_{k+1,k+1} & P_{k+1,k+2} & \cdots & P_{k+1,n} \\ 0 & 0 \ldots 0 & P_{k+2,k+1} & P_{k+2,k+3} & \cdots & P_{k+2,} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 \ldots 0 & P_{n,k+1} & P_{n,k+2} & \cdots & P_{n,n} \end{bmatrix}$$

ಬೇರೆ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ

$$P_0=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

ಇಲ್ಲಿ A ಯು $k \times k$ ಆಗಿದೆ, B ಯು $(n-k)\times(n-k)$ ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು 0 ವು ತಕ್ಕ ಗಾತ್ರದ ಒಂದು ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. A ಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ $\{X^1, X^2 \ldots, X^k\}$ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ (23)ರ ಪರಿಕರ್ಮಿ P_1ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. (1) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ನಾವು A ಮತ್ತು Bಗಳೆರಡೂ ಲಂಬೀಯ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. R^3ಯು ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟು

ಕೊಳ್ಳೋಣ. ಕೆಳಗಿರುವ R^3 ಮೇಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ?

(a) $P(x,y,z) = \left(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}, \frac{x+y-2z}{\sqrt{6}}, x-y\right)$

(b) $P(x,y,z) =$
$\left(\frac{x+y+2z}{\sqrt{6}}, \frac{x+3y-2z}{\sqrt{14}}, \frac{-4x+2y+z}{\sqrt{21}}\right)$

(c) $P(x,y,z) = \left(\frac{x+z}{\sqrt{2}}, \frac{x-2y-z}{\sqrt{6}}, \frac{x+y-z}{\sqrt{3}}\right)$

2. ಸೂಚಿತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಂದಿಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಗಳು V ಯ ಮೇಲೆ ದತ್ತ ಪರಿಕರ್ಮಿ P ಯು ಲಂಬೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(a) $V = R^4$; ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ, $P(x, y, z, w) = (-y, x, w, -z)$

(b) V ಯು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; $(A,B) = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{21}B_{21} + A_{22}B_{22}$, $PA = C'AC$, ಇಲ್ಲಿ

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) $V = R^2$; $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + (x_1+x_2)(y_1+y_2)$,

$$P(x_1,x_2) = (\sqrt{2}x_1 + (\sqrt{2}/2)x_2, -\sqrt{2}x_1).$$

3. V ಯು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ $(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n, b_0 + b_1t^2 + b_2t^2 + \cdots + b_nt^n) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 = \cdots + a_nb_n$ ಯೊಡನೆ [illegible] ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ; ಆದರೆ ಸದೃಶ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಈ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಾಲಬ್ಧವನ್ನು (f,g) ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. P ಯು $Pf(t)=tf(t)$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ V ಯ ಮೇಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು Q ಯು $Qf(t)=(1/t)(f(t)-f(0))$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ V ಯ ಮೇಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. $P^*=Q$ ಎಂದು, $PQ\neq I$ ಮತ್ತು $QP=I$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಇದು (9) ರಲ್ಲಿರುವ ಸಾಂತ ಆಯಾಮೀಯತೆಯ ಗ್ರಹಿಕೆಯು ಅವಶ್ಯಕವೆಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. $Pt^k=t^{k+1}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ P ಯು ಬಹಳ ಸಲ **ಸ್ಥಾನಾಂತರಿಸುವ** ಪರಿಕರ್ಮಿ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.]

4. P ಮತ್ತು Q ಗಳು (X,Y) ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ PQ ಯು (X,Y) ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

5. ಸೂಚಿತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಾಲಬ್ಧಗಳೊಡನೆ, ಕೆಳಗಿರುವ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಜೋಡಿ V ಮತ್ತು W ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ, V ಯಿಂದ W ಗೆ ದತ್ತ ಪರಿವರ್ತನೆ P ಯು ಲಂಬೀಯವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

(a) $V=R^2$; ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಾಲಬ್ಧ,
$W=R^2$; $((x_1,x_2),(y_1,y_2))=x_1y_1+(x_1+x_2)(y_1+y_2)$,
$P(x_1,x_2)=(x_1,x_2-x_1)$.

(b) $V=R^3$; ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಾಲಬ್ಧ,
W ಯು ≤ 2 ಸ್ತರದ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; $(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt$, $P(x,y,z)=x+yt+zt^2$.

(c) V ಯ ಸ್ತರ ≤ 2 ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ; $(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt$, $W=R^3$; ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಾಲಬ್ಧ,
$P(a_0+a_1t+a_2t^2)=$

$$\left(a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3},\frac{a_1+a_2}{2\sqrt{3}},\frac{a_2}{6\sqrt{5}}\right).$$

6. V ಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಮತ್ತು (X, Y) ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು **ದೃಢಚಲನೆಯು** ಕೆಳಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆ P (ರೇಖೀಯವಾಗಿರುವುದು ಅವಶ್ಯಕವಲ್ಲ) ಆಗಿದೆ,

$$|PX - PY| = |X - Y|.$$

(a) P ಯು ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ P ಯು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) Z ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸದಿಶವಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, $PX = X + Z$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ P ಯು ರೇಖೀಯ ಆಗಿಲ್ಲ ಮತ್ತು P ಯು ಒಂದು ದೃಢ ಚಲನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(c) $P0 = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ P ಯು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $|PX| = |X|$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(d) $P0 = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ P ಯು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $|PX + PY| = |X + Y|$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ:** ಎರಡು ಕಡೆ ವರ್ಗಿಸಿ ಮತ್ತು $|PX + PY|^2$ ಅನ್ನು $|PX - PY|^2$, $|PX|^2$ ಮತ್ತು $|PY|^2$ಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಲು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(e) $P0 = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ P ಯು ಒಂದು ದೃಢ ಚಲನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $(PX, PY) = (X, Y)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ:** (d) ಯನ್ನು ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಕರಣ ಸಾಮ್ಯಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(f) $P0 = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ P ಯು ಒಂದು ದೃಢ ಚಲನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $P(X + Y) = PX + PY$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ:** $|P(X + Y) - PX -$

$PY|^2$ ಅನ್ನು ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿರಿ ಮತ್ತು (e) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(g) $P0=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ P ಯು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ a ಗೆ $P(aX)=aPX$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ :** $|P(aX)-aPX|^2$ ಇದನ್ನು ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು (e) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(h) P ಯು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $QX=PX-P0$ ಆಗಿರಲಿ. Qವು Vಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಇದು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯು ಎರಡು ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ ಎಂದು, ಅವುಗಳಲ್ಲೊಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ಲಂಬೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತೊಂದು ಒಂದು ರೂಪಾಂತರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.

7. $dim\ V=4$ ಮತ್ತು P ಯು (X, Y) ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಧ್ಯಾಯ 3 ಭಾಗ 4 ಅಭ್ಯಾಸ 32 ರಿಂದ, $dim\ M=1$, 2 ಅಥವಾ 3 ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ನಿಶ್ಚರ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ M ಯು P ಗೆ ಇದೆ.

(a) ಇದನ್ನು ಮತ್ತು (22), (23) ಮತ್ತು (24) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ; Pಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಕೆಳಗಿನ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತೆ Vಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

ಇಲ್ಲಿ A ಯು $k \times k$ ಆಗಿದೆ, B ಯು $(4-k) \times (4-k)$ ಆಗಿದ್ದು $0<k<4$ ಮತ್ತು ತಕ್ಕ ಗಾತ್ರದ ಒಂದು ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

(b) ($8a$) ಭಾಗದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಯ ಸಾಧ್ಯ ಗುಣಧರ್ಮದ ಬಗೆಗೆ ಒಂದು ಸಂಪೂರ್ಣ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಿರಿ. ಇದನ್ನು P ಯ ಪ್ರಭಾವದ ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತಿಕ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.

(c) $dim\, V = 5$ ಆಗಿರುವ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ, ಇದೇ ರೀತಿಯ ಒಂದು ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

8. $P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಲ್ಲಿ

$$y_1 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{\sqrt{2 \cdot 3}},$$

$$y_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4}{\sqrt{3 \cdot 4}}, \ \ldots,$$

$$y_{n-1} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - (n-1)x_n}{\sqrt{(n-1)n}},$$

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\sqrt{n}}.$$

(a) Pಯು R^n ಮೇಲಿರುವ ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$. ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ: ($9e$)ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(c) $\bar{x} = (1/n)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ ಮತ್ತು

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x^2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

ಆಗಿರಲಿ.

$ns^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ.

ಈ ಭಾಗದ ಉಳಿದ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಇದೇ ಭಾಗದ ಕೆಲವು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ರೂಪಗಳ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ. (ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ರೂಪಗಳ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳು ಮತ್ತು ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಗಾಗಿ ಭಾಗ 2 ರ 12 ರಿಂದ 16ರ ವರೆಗಿನ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.) ಎಲ್ಲ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು $X \cdot Y$ ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುವ ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಡನೆ R^nಗಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಡುವುವು. $g(X)$ ಯು R^n ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ರೂಪವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು T ಯು ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, R^nನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ $g(TX) = g(X)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, T ಯು g ಯನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

9. $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಕೇವಲ T ಯು ಲಂಬೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು g ಯನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ :** ಇದು ಕೇವಲ $(9e)$ ಯ ಮತ್ತೊಂದು ನಿರೂಪಣೆಯಾಗಿದೆ]

10. $g(X)$ ಯು R^n ಮೇಲಿರುವ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ರೂಪವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $X \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $g(X) \neq 0$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. T ಯು g ಯನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಆಗ T ಯು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು T^{-1} ಯು g ಯನ್ನು ಕೂಡ ಸಂರಕ್ಷಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. S ಮತ್ತು T ಗಳು g ಯನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಿಕೊಂಡರೆ, ಆಗ ST ಯು g ಯನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

11. $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ ಆಗಿರಲಿ. Tಯು g ಯನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಿದರೆ ಆಗ $det\,(T) = \pm 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ :** ಭಾಗ 2 ರ 12 ರಿಂದ 16ರವರೆಗಿನ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $g(X) = PX \cdot X$ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ. $det\,(P) = -1$ ಎಂದು ಮತ್ತು ಕೇವಲ $T^*PT = I$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು g ಯನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ರೂಪವನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿಯನ್ನು ಲೊರೆಂಟ್ಜ್ ಪರಿವರ್ತನೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.]

ಭಾಗ 4. ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಪ್ರಸಂಗ

ಇದರಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನ ಮತ್ತು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಫಲಿತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬದಲಾವಣೆಯಿಲ್ಲ. ಈ

ಕಾರ್ಯವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ಕೈಬಿಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲ ಬಹುಪದಿಗಳೂ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನೆಗಳಿಗೆ ಅಪವರ್ತನಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಧ್ಯಾಯ 2 ರ ಅನೇಕ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿವರ್ತಿಸಿ ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಾಯ 3 ರ ಅನೇಕ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಲಪಡಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗೊಳಿಸಬಹುದು.

$a+ib$ ರೂಪದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಇಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು b ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು $i^2 = -1$. ಎರಡು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಇಂತಿದೆ :

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$

ಮತ್ತು

$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc).$$

ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಸೂತ್ರ ವಿಧಿಗಳೇ ಈ ಪರಿಕರ್ಮಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ. $a+ib \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a}{a_2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2},$$

ಆಗುವುದರಿಂದ ಅಶೂನ್ಯ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಲೂಬಹುದು.

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು ಬಿಡಿ ನಿಮ್ನ ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರ α ದಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. a ಮತ್ತು b ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿರುವಲ್ಲಿ, $\alpha = a+ib$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ a **ಯನ್ನು** α **ದ ವಾಸ್ತವಿಕ ಭಾಗ** ಎಂದೂ ಮತ್ತು b **ಯನ್ನು** α **ದ ಊಹ್ಯ ಭಾಗ** ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳೊಡನೆ ಅಧ್ಯಾಯ 10 ರ ಎಲ್ಲ ಫಲಿತಾಂಶಗಳೂ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳೂ ಕೇವಲ 'ವಾಸ್ತವಿಕ' ಎಂಬ ಪದವನ್ನು 'ಸಮ್ಮಿಶ್ರ' ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸುವುದರಿಂದ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತವೆ. ಈ ಬದಲಾವಣೆಯೊಡನೆ ಸಮೀಕರಣ ವ್ಯೂಹಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸ ಪದರ ಮೇಲಿನ 1 ಮತ್ತು 2ನೇ ಭಾಗಗಳ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು, ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯೂಹಗಳಿಗೆ ಅಂದರೆ, ಸಹ ಗುಣಕಗಳೂ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳೂ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ವ್ಯೂಹಗಳಿಗೆ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತವೆ.

'ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ'ಯು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆ' ಯಿಂದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವಲ್ಲಿ ಮಾತೃಕೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವೂ ಅದೇ ಆಗಿದೆ.

ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಾಕಾರದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಒಂದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸಿದರೆ, ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಬಾಣಗಳ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯು ಉಪಯುಕ್ತ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸದೃಶವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಕೈಬಿಡೋಣ. ಸಮ್ಮಿಶ್ರ *n-tuples* ನ ಸಮಷ್ಟಿ C^n ಅನ್ನು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ ಖಚಿತವಾಗಿ ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 3 ರ R^n ನಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೇ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ, ಆಯಾಮ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆ, ಅವಲಂಬನೆ, ನಿರ್ಮಿಸುವಿಕೆ, ಆಧಾರ, ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅವಕಾಶ, ನೀಟಸಾಲಿನ ಅವಕಾಶ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳು ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತವೆ. 1 ಮತ್ತು 2 ಪೂರ್ವಪಕ್ಷಗಳು ಮತ್ತು 5 ಮತ್ತು 6ನೇ ಪ್ರಮೇಯಗಳು, ಅದೇ ಸಾಧನೆಗಳೊಡನೆಯೇ 'ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ'ಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ 'ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆ'ಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸುವುದರಿಂದ, ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತವೆ. C^n ಸಮಷ್ಟಿಯು ಮತ್ತೆ **ಶಿಷ್ಟ (ಕ್ರಮಪಡಿಸಿದ) ಆಧಾರ** ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ $\{(1,0,\ldots,0)\ (0,1,0\ldots,0)\ (0,0,1,0,\ldots,0), \ldots,(0,0,\ldots,0,1)\}$ ಒಂದು ಆಧಾರದೊಡನೆ, ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಆಯಾಮ n ಅನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. (ಬರೀ **ವಾಸ್ತವಿಕ** ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಲೇ ಗುಣಿಸಲು ಅವಕಾಶವಿರಲು C^n ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಂತೆಯೂ ಕೂಡ ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಡಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ C^n ಯ ವಾಸ್ತವಿಕ ಆಯಾಮವು $2n$ ಆಗಿದೆ. ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುಣಾಕಾರದೊಡನೆ *n-tuples* ನ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಮಷ್ಟಿಗಾಗಿ 'C^n' ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸಂಪ್ರದಾಯವನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ.) ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 3 ರ ಇತರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಕೂಡಲೇ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತವೆ.

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳಿಗೆ ಸದೃಶವಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಮಷ್ಟಿ W ಗೆ ಒಂದು ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯು ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆ. T ಯು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು α ಮತ್ತು β ಗಳಿಗೆ $T(\alpha X+\beta Y)=\alpha TX+\beta YT$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ **ರೇಖಾತ್ಮಕ**ವಾಗಿರುತ್ತದೆ. $V=W$ ಆಗಿದ್ದರೆ, T ಯು ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಅಧ್ಯಾಯ 1, ಭಾಗ 4 ರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತವೆ. 0 ಮತ್ತು I

ಗಳಂತಹ ವಿಶೇಷ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಂತೆಯೇ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಸದೃಶವಾಗಿಯೇ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಡುವುದು. 7, 8 ಮತ್ತು 9ನೇ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಮತ್ತೆ ಕೇವಲ ಅವುಗಳ ಸಾಧನೆಗಳಲ್ಲಿ 'ವಾಸ್ತವಿಕ'ದಿಂದ 'ಸಮ್ಮಿಶ್ರಕ್ಕೆ'ಮಾತ್ರ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಅಪೇಕ್ಷಿಸುತ್ತ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ, ಪರಿವರ್ತನಾ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನೂ ಸದೃಶವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗುವುದು. ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು, ಪ್ರತಿಬಿಂಬನ, ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಅಥವಾ ಮಾತೃಕೆ, ಸ್ವಯಂಬಿಂಬನ, ವ್ಯಸ್ತ, ಕರ್ಣರೇಖೀಯ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಕರ್ಣರೇಖೆ, ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಬದಲಾವಣೆ ಮತ್ತು ಊರ್ಧ್ವ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸದೃಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

ನಿರ್ಧಾರಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ ಮತ್ತು ಏಕೈಕತೆಯು ಅಧ್ಯಾಯ 2 ಭಾಗ 6 ರ ಎಲ್ಲ ಫಲಿತಾಂಶಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. ಅಧ್ಯಾಯ 2, ಭಾಗ 7 ರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಕುತೂಹಲವನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸದೃಶವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಅಧ್ಯಾಯ 2 ರ ಭಾಗ 1 ರಿಂದ 5 ರ ವರೆಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಮಾರ್ಪಾಡುಗಳೊಡನೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಈಗ ನೋಡೋಣ.

$\alpha = a + ib$ ಆಗಿರಲಿ. ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆ $a - ib$ ಯನ್ನು α ದ ಸಂಯುಗ್ಮಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು $\bar{\alpha}$ ದಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. (ಅನೇಕಸಲ 'α – ತಲೆಕಟ್ಟು' ಅಥವಾ 'α – ಸಂಯುಗ್ಮಿ 'ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.) ಸಂಯುಗ್ಮಿತೆಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

(a) $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$,

(b) $(\alpha + \bar{\alpha})/2$ ಯು α ದ ವಾಸ್ತವಿಕ ಭಾಗವಾಗಿದೆ; $(\alpha - \bar{\alpha})/2i$ ಯು α ದ ಊಹ್ಯಭಾಗವಾಗಿದೆ,

(1) (c) $\overline{(\alpha + \beta)} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$,

(d) $\overline{(\alpha\beta)} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$,

(e) α ಯು ಕೇವಲ $\alpha = \bar{\alpha}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿದೆ,

(f) $\alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2$, ಇದು $\alpha = a + ib$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

ಇವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು. (1 f) ಗುಣಧರ್ಮದಿಂದ ಮುಂದಿನ ತೀರ್ಮಾನವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. $|\alpha|$ ದಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ α ನಿರಪೇಕ್ಷ

ಬೆಲೆಯು, $\alpha = a + ib$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $|\alpha| = \sqrt{a^2 + d^2}$ ನಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟದ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

(a) $|\alpha| > 0$, ಇದು $\alpha \neq 0$, $|0| = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

(b) $|\alpha|^2 + \alpha\bar{\alpha}$,

(2) (c) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$,

(d) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

($2d$) ಯು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಕ್ಷುದ್ರವಾಗಿರದಿದ್ದರೂ ಇವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು. ಈಗ ನಾವು ಕೆಳಗಿರುವ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ, (X, Y) ಎರಡು ಸದಿಶ ಚರಾಂಕಗಳಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುವ, ಒಂದು **ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ**ವನ್ನು ಒಂದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು **ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ** ಉತ್ಪನ್ನದಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ :

(a) $(X, Y) = \overline{(Y, X)}$,

(b) $(\alpha X + \beta Z, Y) = \alpha(X, Y) - \beta(Z, Y)$ α ಮತ್ತು β ಸಮ್ಮಿಶ್ರಕ್ಕೆ,

(3) (c) $(X, \alpha Y + \beta Z) + \bar{\alpha}(X, Y) + \bar{\beta}(X, Z)$ α ಮತ್ತು β ಸಮ್ಮಿಶ್ರಕ್ಕೆ,

(d) $(X, X) > 0$, $X \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ.

($3c$) ಯು ($3a$) ಮತ್ತು ($3b$) ಯ ಒಂದು ಪರಿಣಾಮವಾಗಿದೆ. $(X, X) = \overline{(X, X)}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ($3a$) ಯು (X, X) ಯು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಭರವಸೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. $(X, X)^{1/2}$ ಅನ್ನು $|X|$ ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಈ ಸಾನ್ಯಣಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು X ನ ಉದ್ದ ಅಥವಾ ನಾರ್ಮ್ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ ಜೊತೆನೆ ಅಧ್ಯಾಯ 1 ರ, 1 ರಿಂದ 3ನೇ ಭಾಗದವರೆಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು, ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತವೆ. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಿಯಮವು, ಒಂದು ಸದಿಶದ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದರ ಉತ್ಕ್ಷೇಪ, ಲಂಬೀಯತೆ, ಲಂಬ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಣ ಅಸಮತೆಯಂಥ ಪದಪುಂಜಗಳನ್ನು ಇವು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ನೇರ ಜ್ಯಾಮಿತಿಕ ಸದೃಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದೆ ಇದ್ದರೂ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(X,Y)=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, X ಮತ್ತು Y ಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಅಥವಾ **ಲಂಬೀಯವಾಗಿವೆ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಮೊದಲಿನಂತೆಯೇ ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ದತ್ತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಕವಾಗಿ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಧ್ರುವೀಕರಣ ಸಾಮ್ಯಕವು [ಅಧ್ಯಾಯ 2, ಭಾಗ 2 ರ (13)] ಕೊಂಚ ಮಾರ್ಪಾಡನ್ನು ಅಪೇಕ್ಷಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗುವುದು.

ಲಂಬೀಯ ಮತ್ತು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರಗಳು ಸ್ಕ್ವಾರ್ಜ್ ಅಸಮತೆ ಮತ್ತು ಗ್ರಾಮ್–ಸ್ಕ್ಮಿಡ್ಟ್ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು, ಸಾಧನೆಗಳಲ್ಲಿ 'ವಾಸ್ತವಿಕಕ್ಕೆ' 'ಸಮ್ಮಿಶ್ರ'ವನ್ನು ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಸಂಯುಗ್ಮತೆಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತವೆ.

C^n ಸಮಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ **ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು** ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$(4)\qquad ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \dots + x_n\bar{y}_n.$$

ಈ ವಾಖ್ಯಾನವು (3) ನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದರಿಂದ, ಈ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದು ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 2, ಭಾಗ 4 ರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು, ವಿಶೇಷವಾಗಿ ತುಂಬ ಉಪಯುಕ್ತ ಪ್ರಮೇಯ 16, ಕೂಡಲೇ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವು (ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ, ಅಸ್ತಿತ್ವವೂ) ತಕ್ಷಣ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಯ ಮಾತೃಕೆ ವಿವರಣೆಯು ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಮಾರ್ಪಾಡನ್ನು ಅಪೇಕ್ಷಿಸುತ್ತದೆ. (X,Y) ಯು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ, T ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\{X^1, X^2, \dots, X^n\}$ ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ. A ಯು T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು B ಯು T^*ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $A_{ij}=(TX^j,X^i)$ [ನೋಡಿ, ಅಧ್ಯಾಯ 2, ಭಾಗ 5 ರ (11)] ಮತ್ತು $B_{ij}=(T^*X^j, X^i)$. ಆದರೆ $(TX^j, X^i) = (X^j, T^*X^i)$ ಆಗುವುದರಿಂದ $B_{ij}=\bar{A}^{ji}$. ಈ ಕಾರಣಕ್ಕಾಗಿ B ಯನ್ನು A ಯ ಸಂಯುಗ್ಮ ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು B ಯನ್ನು A^* ನಿಂದ

ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. A ಯ ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟನವನ್ನು A' ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುವುದನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

(5) ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು A ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಈ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T^*ನ ಮಾತೃಕೆ A^* ಆಗಿದೆ.

ಈ ಮಾರ್ಪಾಡಿನೊಡನೆ, ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಯ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಕೂಡಲೇ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿ T ಯು, $T^* = T$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸ್ವ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ ಅಥವಾ **ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್** ಎಂದೂ ಮತ್ತು $T^* = T$ ಆಗಿದ್ದರೆ **ವಿಷಮ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ** ಅಥವಾ **ವಿಷಮ ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್** ಎಂದೂ, ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳಿಂದ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. A ಯು ಸ್ವ ಅನುಬಂಧಿ ಆಗಿದ್ದರೆ, A ಯ ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ದಾಖಲಾತಿಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿರಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಇದು $i = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ $A_{ii} = A_{ii}$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 3 ರ ಭಾಗ 1 ರಿಂದ 3 ರ ವರೆಗಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳು ಮತ್ತು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಎಂದಿನಂತೆ 'ವಾಸ್ತವಿಕ'ಕ್ಕೆ 'ಸಮ್ಮಿಶ್ರ'ದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪನೆಯಿಂದ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತವೆ. ಅಧ್ಯಾಯ 3, ಭಾಗ 4 ರ ಪ್ರಮೇಯ 20 ಮತ್ತು 21 ಸುಲಭವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತವೆ. ಸಮಾಂಗತ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳೂ ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿಗೆ ಸಾಧನೆಗಳು ಸುಲಭತರವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತವೆ. ಇದರ ಕಾರಣವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರಬೇಕು. ಪ್ರಮೇಯ 22 ರ ಸಾಧನೆಯ ಕಠಿಣತೆಗೆ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಕಾರಣವಾಗಿದ್ದುದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲದ ವರ್ಗ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಶಕ್ಯ ಅಸ್ತಿತ್ವವನ್ನು T ಗೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಸ್ಕರಿಸುವ ಅವಶ್ಯಕತೆ. ಈ ಕಷ್ಟಗಳು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಉದ್ಭವಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಯಾವುದೇ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಬಹುಪದಿಯು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸರಳ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಗೆ ಅಪವರ್ತನಗೊಳ್ಳಬಲ್ಲುದು.

ಅಧ್ಯಯ 4, ಭಾಗ 1 ರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

(6) $ST = TS$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮದ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯ ಮೇಲಿನ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು S ಮತ್ತು T ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ S ಮತ್ತು T ಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಆಧಾರ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ವು V ಗೆ ಇದೆ.

(6) ರ ಸಾಧನೆಯು ಎಂದಿನಂತೆ 'ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ'ಗೆ 'ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆ'ಯ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪನೆಯೊಡನೆ ಪ್ರಮೇಯ 23 ರ ಸಾಧನೆಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 4 ರ 2 ಮತ್ತು 3ನೇ ಭಾಗಗಳ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಭಾಗ 6 ರಲ್ಲಿ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸುವುವು.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1\. (a) $(3+7i)+(6-2i)(\sqrt{2}-i)$ ನ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮತ್ತು ಊಹ್ಯ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) $1/(2+3i)$ನ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮತ್ತು ಊಹ್ಯ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(c) $(2-i)/\overline{(3-7i)}\,(6-2i)+\overline{(1+i)})$ ನ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮತ್ತು ಊಹ್ಯ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(d) $|\alpha|=1$ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $\bar{\alpha}=1/\alpha$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(e) $\alpha=(3-6i)/(2-i)$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $|\alpha|$ ವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(f) (2d) ಯು ಸಫಲವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : $\alpha=a_1+ia_2$ ಮತ್ತು $\beta=b_1+ib_2$ ಆಗಿದ್ದರೆ, (1f) ಅನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $|\alpha+\beta|^2$ ಅನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಿರಿ. ಅನಂತರ $2a_1b_1+2a_2b_2\leq 2\,(a_2^2)^{1/2}(b_1^2+b_2^2)^{1/2}$ ಅನ್ನು ದೊರಕಿಸಲು ಸ್ಕ್ವಾರ್ಜ್ ಅಸಮತೆಯನ್ನು ಉಪ ಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(g) ಕೇವಲ $\beta^2\neq 4\gamma$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಬಹುಪದಿ $t^2+\beta t+\gamma$ ಯು ಎರಡು ವಿಶಿಷ್ಟ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(h) ಕೆಳಗಿರುವುದರ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$det\begin{bmatrix} i+1 & 3i \\ -1 & 2+i \end{bmatrix}.$$

(i) α ಅನ್ನು ಧ್ರುವ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದರಿಂದ α ದ ವರ್ಗ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. $\alpha = a + ib$ ಆಗಿದ್ದು, a ಮತ್ತು b ವಾಸ್ತವಿಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $r^2 = a^2 + b^2$ ಮತ್ತು $\theta = \tan^{-1}(b/a)$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $a = r \cos\theta$, $b = r \sin\theta$. $\beta_1 = r^{1/2} [\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2)]$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನಂತಿದ್ದರೆ,

$$\beta_2 = r^{1/2}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2\pi}{2}\right)\right],$$

ಆಗ $\alpha = \beta_1^2 = \beta_2^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

2. ಕೆಳಗಿರುವ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸ್ಥಾನ, ಶೂನ್ಯತೆ ಮತ್ತು ವ್ಯಸ್ತವನ್ನು ಅದು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & i \\ 1 & i & 1 & i \\ 0 & i+1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2i \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & i & 0 \\ 1 & - & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ i & i & i \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4-i & 1+3i & 1-i & 6 \\ 1 & 3i & 0 & 1 \\ -i & 1+i & 1-i & -1 \\ 3 & -i & 0 & 6 \end{bmatrix}$

3. ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ M ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುವ C^3ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(a) M ಯು $\{(1, 1, 1), (1, i, 1), (0, i+1, 0)\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

(b) $\alpha + \beta = \gamma = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ (α, β, γ) ಗಳ ಗಣವು M ಆಗಿದೆ.

(c) $\alpha = \beta$ ಮತ್ತು $\gamma = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ (α, β, γ) ಗಳ ಗಣವು M ಆಗಿದೆ.

4. T ಯು ಕೆಳಗಿರುವುದರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ C^3 ಮೇಲಿನ ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ.

$$T(\alpha,\beta,\gamma)=(i\alpha+\beta+\beta i\gamma, i\gamma).$$

T ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿರುವ ಆಧಾರಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $\{(1, i, 1), (i, 0, 0), (i, i, 0)\}$
(b) $\{(i+1, i+2, i+3), (i+4, i+5, i+6), (i, 2i, 3i)\}$

5. A ಯು ಅಭ್ಯಾಸ 4(*a*) ಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು B ಯು ಅಭ್ಯಾಸ 4(*b*) ಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ $P_0^{-1}AP_0=B$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆ P_0 ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. C^3 ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವು $\{(1, i, 1,) (-i, 1, 0), (2i+1, 0, 3)\}$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಗ್ರಾಮ್ ಸ್ಮಿಡ್ಟ್ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ C^3 ಗೆ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ $((\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)) = \alpha_1\bar{\alpha}_2 + (\alpha_1+\beta_1)\overline{(\alpha_2+\beta_2)} + (\beta_1+\gamma_1)\overline{(\beta_2+\gamma_2)}$ ಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. V ಯು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ $(f,g)=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ ಯೊಡನೆ ಸ್ತರ ≤ 2 ರ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ.

(a) $\{1,t\}$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) K ಯು $Kf=f(0)$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ. $Kf=(f,g)$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಹುಪದಿ g ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ:** ಪ್ರಮೇಯ 16ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.]

(c) $Df=df/dt$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ V ಯ ಮೇಲಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು D ಆಗಿರಲಿ. D^* ಗೆ ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯಲ್ಲಿರುವ X ಮತ್ತು Y ಸದಿಶಜೋಡಿಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನವು (X,Y) ಆಗಿರಲಿ. (X,Y) ಯು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ ಎರಡು ನಿರ್ಬಂಧಗಳು $(X,Y)=(Y,X)$ ಮತ್ತು $(X,X)\geq 0$ ಅನ್ನು ಮತ್ತು $(3b)$ ಯನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ $(X,Y)=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ**: (iX, iX) ಅನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಮೊದಲು $(X,X)=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಅನಂತರ $(X,Y)=\frac{1}{4}(X+Y, X+Y)-\frac{1}{4}(X-Y, X-Y)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

9. (X,Y) ಯು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರಲಿ. ಧ್ರುವೀಕರಣ ಸಾಮ್ಯಕ $(X,Y)=\frac{1}{4}(X+Y, X+Y)-\frac{1}{4}(X-Y, X-Y)+(i/4)(X+iY, X+iY)-(i/4)(X-iY, X-iY)$ ಅನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.

10. T ಯು $T(\alpha,\beta)=(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ ಯಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟ C^2 ಮೇಲಿನ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿರಲಿ. C^2 ನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a ಮತ್ತು b ಗಳಿಗೆ $T(aX+bY)=aTX+bTY$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. T ಯು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಅಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

11.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$
ಇದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಆದರೆ ವಾಸ್ತವಿಕ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಅಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

12. ಮಾತೃಕೆಗಳು A ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ $P_0^{-}AP_0$ ಯು ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖೀಯ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು P_0 ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $A=\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ (b) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}$

13.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ಇದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಅಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

14.

$$A = \begin{bmatrix} 3-i & 2+2i \\ \dfrac{1}{1-i} & 3i \end{bmatrix}$$

ಇಲ್ಲಿ $A = B + iC$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎರಡು ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಾತೃಕೆಗಳು B ಮತ್ತು C ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [ಸೂಚನೆ: $A = B + iC$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. A^* ಏನಾಗಿದೆ?]

15. V ಯು $n \times x$ ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿರಲಿ. $A+B$ ಯನ್ನು ಮಾತೃಕೆ ಸಂಕಲನದಿಂದ ಮತ್ತು aA ಯನ್ನು ಅದಿಶ ಗುಣಾಕಾರದಿಂದ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವುದರಿಂದ V ಯನ್ನು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. V ಯ ಆಯಾಮ ಏನಾಗಿದೆ?

16. A ಯು ಒಂದು $n \times n$ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ.

$$det\,(A^*) = \overline{det\,(A)}.$$

[ಸೂಚನೆ: ಅಧ್ಯಾಯ 2 ರ ಭಾಗ 6 ರ (18) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.]

17.

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{1+i}{2} & \dfrac{-1+i}{2} \\ \dfrac{-1+i}{2} & \dfrac{1+i}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

$P_0^{-1}AP_0$ ಮತ್ತು $P_0^{-1}BP_0$ ಗಳು ಕರ್ಣರೇಖೀಯವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಮಾತೃಕೆ P_0 ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

18.

$$A = \begin{bmatrix} 1+2i & 1+i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

A^{10} ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಭಾಗ 5. ಲಂಬ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು ಮತ್ತು ಮಿಶ್ಯ ಪ್ರಮೇಯ

ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕನವನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ 21 ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಮೇಯು ತನ್ನ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ 'ವಾಸ್ತವಿಕ'ದ ಬದಲಾಗಿ 'ಸಮ್ಮಿಶ್ರ' ಪದವನ್ನು ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಸರಳ ಪ್ರಸಂಗದ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. ಪ್ರಮೇಯ 22 ರ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸದೃಶವನ್ನು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 20 ಮತ್ತು 21 ರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ ಪುನಃ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. V ಯು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು T ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. T ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು P ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಿರಿ.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಲ್ಲಿ ಕೇವಲ $P=(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_r)$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ. T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಕೇವಲ ಯಾವುದಾದರೂ i ಗೆ $1 \le i \le r$, $\alpha = \alpha_i$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, α ಒಂದು T ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ. ಕೆಳಗಿರುವಂತೆ $E_1, E_2, \ldots, E_r$ ಏಕೈಕ ಪ್ರಲಂಬಗಳೂ ಉಂಟು,

(1)
(a) $T = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_r E_r$,
(b) $I = E_1 + E_2 + \cdots + E_r$,
(c) $E_i E_j = 0, \quad i \neq j$.

$P_1, P_2, \ldots, P_r$ ಗಳು $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ಗಳಿಗೆ ಲಾಗ್ರಾಂಜ್ ಅಂತರ್ಧ್ರುವೀಕರಣ ಬಹುಪದಿಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $i = 1, 2, \ldots, r$ ಗೆ $E_i = P_i(T)$.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ಗಳ ಮೇಲಿನ ನಿರ್ಬಂಧಗಳನ್ನು ಸಡಿಲಿಸುವುದರಿಂದ ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ.

(2) $(1a,b,c)$ ನಿರ್ಬಂಧಗಳು ಸಫಲವಾಗುವಂತೆ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ (ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿರುವುದು ಅವಶ್ಯಕವಲ್ಲ) ಮತ್ತು ಪ್ರಲಂಬ ಗಳು $E_1, E_2, \cdots, E_r$ ಗಳು ಇದ್ದರೆಮಾತ್ರ Tಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ

ಈಗ V ಯು (X, Y) ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುವ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ ವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ. ಕೆಳಗಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಒಂದು ಉತ್ತರವನ್ನು ಕೊಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತೇವೆ.

(3) V ಯು ಮೇಲಿರುವ ಯಾವ T ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿಗೆ, ನಾವು T ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

(X, Y) ಯು ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸುವುದರೊಡನೆ ನಾವು C^2 ಮೇಲಿನ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ. T ಯು ಹರ್ಮಿ ಷಿಯನ್ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \text{ಯು}$$

$\{(1,0), (0,1)\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ T ಯು ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $A = A^*$. ಏಕೆಂದರೆ,

$$A^* = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{bmatrix}$$

ಇದರಿಂದ $\bar{\alpha} = \alpha$, $\bar{\delta} = \delta$, ಮತ್ತು $\gamma = \bar{\beta}$. ಹೀಗೆ α ಮತ್ತು δ ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$A = \begin{bmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{bmatrix},$$

ಇಲ್ಲಿ a, b, c ಮತ್ತು d ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ.

(4) $$\det(tI - A) = t^2 - (a+d)t + ad - (b^2 + c^2).$$

(4) ರ ಮೂಲಗಳು ಮುಂದಿರುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

$$t = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - b^2 - c^2)}}{2}$$

$$= \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4(b^2 + c^2)}}{2}$$

ಇದು $a \neq d$ ಅಥವಾ $b \neq 0$ ಅಥವಾ $c \neq 0$ ಆಗಿರಲು ಅಸಮವಾಗಿರುವ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮೂಲಗಳನ್ನು (4) ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. $a = d$ ಮತ್ತು $b = c = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $A = aI$. ಇಲ್ಲವಾದರೆ c_1 ಮತ್ತು c_2 ಗಳು (4) ರ ನಿಯತ ಮೂಲಗಳಾಗಿರಲಿ. $|X^1| = |X^2| = 1$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $TX^1 = c_1 X^1$ ಮತ್ತು $TX^2 = c_2 X^2$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಫಲಿತಾಂಶದಿಂದ $\{X^1, X^2\}$ ಯು Tಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ c^2ನ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

(5) V ಯು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ (X, Y) ಯೊಡನೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಮಷ್ಟಿ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. T ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮ ಎಂದೂ ಮತ್ತು $TX^1 = \alpha_1 X^1$, $T^*X^2 = \alpha_2 X^2$, $\alpha_1 \neq \bar{\alpha}_2$ ಯೊಡನೆ ಎಂದೂ ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $(X^1, X^2) = 0$.

$(\alpha_1 - \bar{\alpha}_2)(X^1, X^2) = (\alpha_1 X^1, X^2) - (X^1, \alpha_2 X^2) = (TX^1, X^2) - (X^1, T^* X^2) = 0$. $\alpha_1 \neq \bar{\alpha}_2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $(X^1, X^2) = 0$ ಎಂದು ಹೊಂದಿರಬೇಕು.

ಈಗ $T^*T = I$ ಆಗಿರುವಂತೆ T ಯು R^2 ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಿಯ ಪರಿಕರ್ಮ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \text{ ಯು}$$

$\{(1,0), (0, 1)\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $A^*A = I$ ಇದರಿಂದ

(6) $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1, \quad \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} = 0.$

ಅದೂ ಅಲ್ಲದೆ

(7) $|det\,(A)| = 1$ ಆಗುವುದರಿಂದ $|\alpha\delta - \beta\gamma| = 1.$

(6) ಮತ್ತು (7) ರ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು $det\ (tI - A)$ ಯ ಮೂಲಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದನ್ನು ಸುಲಭಗೊಳಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅಧ್ಯಾಯ 3, ಭಾಗ 2 ರ (15) ರಿಂದ ಈ ಬಹುಪದಿಯು ಒಂದು ಮೂಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

(8) $$det\ (tI - A) = (t - \lambda)\ (t - \mu).$$

ಹೀಗೆ λ ಮತ್ತು μ ಗಳು T ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಾಗಿವೆ. $TX = \lambda X$ ಆಗಿರುವಂತೆ $X \neq 0$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $(X, X) = (T^*TX, X) = (TX, TX) = (\lambda X, \lambda X) = |\lambda|^2(X, X)$, ಆಗುವುದರಿಂದ, $|\lambda|^2 = 1.$ ಹಾಗೆಯೇ $|\mu|^2 = 1.$ ಪ್ರಮೇಯ 10 ರಿಂದ $T^*T = I$ ಆಗುವುದರಿಂದ $TT^* = I$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಹೀಗೆ $0 = |TX - \lambda X|^2 = (TX, TX) - (TX, \lambda X) - (\lambda X, TX) + (\lambda X, \lambda X) = (T^*TX, X) - \bar{\lambda}(TX, X) - \lambda(X, TX) + (\lambda X, \lambda X) = (TT^*X, X) - \bar{\lambda}(X, T^*X) - \bar{\lambda}(T^*X, X) + |\lambda|^2(X, X) = (T^*X, T^*X) - (\bar{\lambda}X, T^*X) - (T^*X, \bar{\lambda}X) + (\bar{\lambda}X, \bar{\lambda}X) = |T^*X - \bar{\lambda}X|^2.$

ಹೀಗೆ $T^*X = \bar{\lambda}X.$ ಸಾಮ್ಯತೆಗಳ ಈ ಸಂಗ್ರಹವು ಕೇವಲ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು $T^*T = TT^*$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನೂ ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿದುದರಿಂದ ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿರುವುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಯಿತು.

(9) V ಯು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ (X, Y) ಯೊಡನೆ ಒಂದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು $T^*T = TT^*$ ಆಗಿರುವಂತೆ T ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಕೇವಲ $T^*X = \lambda X$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $TX = \bar{\lambda}X.$

ಮೊದಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿ. $\lambda \neq \mu$ ಆಗಿದ್ದರೆ $|X^1| = |X|^2 = 1$ ಮತ್ತು $TX^1 = \lambda X^1$, $TX^2 = \mu X^2$ ಆಗಿರುವಂತೆ X^1 ಮತ್ತು X^2 ಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ. ಆಗ $T^*X^2 = \bar{\mu}X^2$. $\bar{\bar{\mu}} = \mu$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $(X^1, X^2) = 0$ ಎಂದು (5) ರಿಂದ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ $\{X^1, X^2\}$ ಯು T ಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ C^2 ನ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. $\lambda = \mu$ ಆಗಿರುವ ಪ್ರಸಂಗವನ್ನು ಒಂದು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಬಿಡೋಣ. $(X^1, X^2) = 0$ ಎಂಬ ಸಾಧನೆಯು ಬದಲಾವಣೆಯಿಲ್ಲದೆ ಮುಂದಿನದನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣಗೊಳ್ಳುವುದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

(10) V ಮತ್ತು T ಗಳು (9) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇರಲಿ, ಇದರಿಂದ $T^*T = TT^*$. $\lambda \neq \mu$ ಮತ್ತು $TX^1 = \lambda X^1$, $TX^2 = \mu X^2$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(X^1, X^2) = 0$.

$T = T^*$ ಅಥವಾ $T^*T = I$ ಆಗಿರುವಂತೆ T ಯು C^2 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (3) ರ ಉತ್ತರವು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ. $T^*T = I$ ಆಗಿರುವ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯ ದಾಖಲಾತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಿದ ಗಣನೆಯು ಸಾಕಷ್ಟು ಕಠಿಣವಾಗಿದೆ. (9) ಮತ್ತು (10) ಪರಿಣಾಮಗಳು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಗಣನೆಗಳಿಂದ ದೊರಕಿವೆ ಮತ್ತು (8)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಉತ್ತರವನ್ನು ದೊರಕಿಸುವಲ್ಲಿ $T^*T = TT^*$ ನಿರ್ಬಂಧವು ಅವಶ್ಯವೆಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. $T^*T = TT^*$ ನಿರ್ಬಂಧವು (3) ನ್ನು ಪಾಲಿಸಲು T ಗೆ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, (3) ಕ್ಕೆ ಉತ್ತರವು ಧನವಾಗಿರುವ ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿ T ಆಗಿರಲಿ. T ಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ V ಯ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಇರಲಿ; $i = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ $TX^i = a_i X^i$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. A ಯು $\{X^1, X^2 \ldots, X^n\}$ ಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

ಈ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ A^* ಯು T^* ನ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು

$$A^* = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \bar{\alpha}_n \end{bmatrix} \tag{12}$$

$A^*A = AA^*$ ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $T^*T = TT^*$.

$T^*T = TT^*$ ಆಗಿದ್ದರೆ, V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. (3) ರ ಉತ್ತರವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 24 (ರೋಹಿತ ಪ್ರಮೇಯ). ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ (X, Y)

ಇರುವ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮೀಯ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯು V ಇರಲಿ ಮತ್ತು T ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಕೇವಲ T ಯು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ V ಯು T ಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಸಾಧನೆ. V ಯು ಇಂಥ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆಗ Tಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು (11) ಮತ್ತು (12) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ; ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

T ಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಮತ್ತು T ಗೆ Pಯು ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಅಧ್ಯಾಯ 3, ಭಾಗ 2 ರ (15) ರಿಂದ P ಯು ರೇಖೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಗೆ ಅಪವರ್ತನಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ. P ಯು ಪುನರಾವರ್ತಿತ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲವೆಂದು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. $P=(t-\alpha)^2q$. P ಯು $(t-\alpha)q$ ಅನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, $(T-\alpha I)q(T)X\neq 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ X ಯು V ಯಲ್ಲಿರಲಿ ಮತ್ತು $Y=(T-\alpha I)q(T)X$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $(T-\alpha I)Y=(T-\alpha I)^2q(T)X=P(T)X=0$. (9) ರಿಂದ $(T^*-\bar{\alpha}I)Y=0$ ಎಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. $Y\neq 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $0<(Y,Y)$ $=(Y,(T-\alpha I)q(T)X)=((T^*-\bar{\alpha} I)Y, q(T)X)=0$. ಇದು ಒಂದು ವಿರೋಧಾಭಾಸವಾಗಿದೆ. P ಯು ಪುನರಾವರ್ತಿತ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲವೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವುದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 21 ರಿಂದ ನಮಗೆ T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ ನಾವು ಪ್ರಮೇಯ 21 ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನಕಲು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ಗಳು T ಯ ವಿಶಿಷ್ಟ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $P_1, P_2, \ldots, P_r$ಗಳು $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ಗಳಿಗೆ ಲಾಗ್ರಾಂಜೆ ಅಂತರ್ಧ್ರುವೀಕರಣ ಬಹುಪದಿಗಳಾಗಿರಲಿ. $P_i(T)$ ಯನ್ನು E_i ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಿ. ಆಗ $E_i^2=E_i$, $i=1, 2, \ldots, r$ ಮತ್ತು $(1a,b,c)$ ನಿರ್ಬಂಧಗಳು ಸಫಲವಾಗುತ್ತವೆ. $1\leq i\leq r$ ಗೆ E_i ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ $\{X_i^1, X_i^2, \ldots, X_i^{k_i}\}$ ಯು ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $D=\{X_1^1, X_1^2, \ldots, X_1^{k_1}, X_2^1, X_2^2, \ldots, X_2^{k_2}, \ldots, X_r^1, X_r^2, \ldots, X_r^{k_r}\}$. ಆಗ, ಪ್ರಮೇಯ 20 ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ, D ಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ T ಗೆ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು D ಯು V ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. D ಯ ರಚನೆಯಿಂದ, $i=1, 2,$

..., k_i ಮತ್ತು $i = 1, 2, \ldots, r$ ಗಳಿಗೆ $l \neq s$ ಮತ್ತು $|X^i| = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ $(X^i_l, X^i_s) = 0$. ಈಗ ನಾವು (10) ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತೇವೆ. $l = 1, 2, \ldots, k_i$ ಮತ್ತು $s = 1, 2, \ldots, k_j$ ಮತ್ತು $i = 1, 2, \ldots, r$ ಮತ್ತು $j = 1, 2, \ldots, r$ ಗಳಿಗೆ $TX^i_l = \alpha_i X^i_l$ ಮತ್ತು $TX^s_j = \alpha_j X^s_j$. $i \neq j$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (10) ರಿಂದ $(X^i_l, X^s_j) = 0$ ಏಕೆಂದರೆ $\alpha_i \neq \alpha_j$. ಇದು V ಗೆ D ಯು ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

E_i ಪ್ರಲಂಬನಗಳು T ಯಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ ಮತ್ತು $T, 1 \leq i \leq r$ ಗೆ **ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಂದ ಇದು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವಾಗಿರದಿದ್ದರೂ

(13) $E_i^* = E_i, \quad i = 1, 2, \ldots, r$ ಎಂದಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ನಾನಾ ದಾರಿಗಳಿವೆ. ಕೆಳಗಿರುವ ಎರಡು ಫಲಿತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಹೊಸ ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ (13) ರ ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನಾವು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

(14) T ಯು ಲಂಬ ಮತ್ತು gಯು ಒಂದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $g(t)$ ಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

(15) $S^*S = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $S = 0$.

(14) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು $g = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \cdots + \beta_n t^n$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆಗ $g(T) = \beta_0 I + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \cdots + \beta_n T^n$ ಆಗುವುದರಿಂದ $(g(T))^* = \bar{\beta}_0 I + \bar{\beta}_1 T^* + \bar{\beta}_2 (T^*)^2 + \cdots + \bar{\beta}_n (T^*)^n$. $f = \bar{\beta}_0 + \beta_1 t + \bar{\beta}_2 t^2 + \cdots + \bar{\beta}_n T^n$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಇದು $f(T^*) = (gT))^*$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ $T^k T^* = T^* T^k$ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $k \geq 1$ ಗೆ. ನಾವು $g(T) f(T^*) = f(T^*) g(T)$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. $f(T^*) = g(T))^*$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದು $g(T)$ ಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ ಮತ್ತು (14) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತದೆ.

(15) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು $S^*SX = 0$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಆಗ $(S^*SX, X) = 0$. $(S^*SX, X) = (SX, SX)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, SX

$= 0$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. $S^*S = 0$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವೂ $S^*SX = 0$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವೂ ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ.

(13) ರ ಸಾಧನೆಗೆ ಹಿಂದಿರುಗಿ, $E_i = P_i(T)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು E_i ಯೂ T ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ E_i ಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ. (13) ರ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ:

(16) E ಯು ಒಂದು ಲಂಬ ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ E ಯು ಸ್ವಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಯಾಗಿದೆ.

E ಯು ಒಂದು ಲಂಬ ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು $S = E - EE^*$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $S^* = E^* - (EE^*)^* = E^* - E^{**}E^* = E^* - EE^* = E^* - E^*E$. ಹೀಗೆ $S = E(I - E^*)$ ಮತ್ತು $S^* = E^*(I - E)$. $E = E^2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $(I - E)E = 0$. ಆದ್ದರಿಂದ $S^*S = E^*(I - E)E(I - E^*) = 0$. (15) ರಿಂದ $S = 0$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ, ಎಂದರೆ, $E = EE^*$. ಆದ್ದರಿಂದ $E^* = (EE^*)^* = E^{**}E^* = EE^* = E$. ಇದು (16) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ. (14) ಮತ್ತು (16) ರಿಂದ (13) ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಟೀಕೆಗಳು : ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ನಾನಾ ವರ್ಗಗಳು ಲಂಬವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, T ಯು ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $T = T^*$ ಆಗುವುದರಿಂದ $TT^* = T^2 = T^*T$. $U^*U = I$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಪ್ರಮೇಯ 10 ರಿಂದ $UU^* = I$ ಆಗುವುದರಿಂದ, $U^*U = UU^*$. ಇದು (6), (7) ಮತ್ತು (8) ರ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪವಾಗಿದೆ. $U^*U = I$ ಆಗಿರುವಂತಹ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿ U ಇದನ್ನು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಏಕಾತ್ಮ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮುಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಪ್ರಮೇಯ 24 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಲಂಬ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳ ಒಂದು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಭಾಗದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು. A ಯು ಒಂದು $n \times n$ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $A^*A = AA^*$ ಆಗಿದ್ದರೆ A ಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. C^n ಗೆ ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಾಲ

ನ್ನು ಕೊಟ್ಟದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ ನಿಯತ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಆಗ ಹೊಂದಿರುವ C^n ಮೇಲಿನ ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು T ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ * ನ ಮಾತೃಕೆಯು A^* ಆಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಕೇವಲ T ಯು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

Aಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಪ್ರಮೇಯ 24 ರಿಂದ ^{n} ಯು Tಗೆ ಸ್ವಮೂಲಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಧಾರ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಹೊಂದಿದೆ. $j=1,2,\ldots,n$ ಗೆ $TX^j=\alpha_j$ ^{j} ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಮತ್ತು $X^j=(\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{nj})$ ಎಂದು ಇಟ್ಟು ಕೊಳ್ಳೋಣ. $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಸಮಲಂಬೀಯವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಬಂಧವಿರಬೇಕು.

(17) $$\beta_{1j}\bar{\beta}_{1k}+\beta_{2j}\bar{\beta}_{2k}+\cdots+\beta_{nj}\bar{\beta}_{nk}=\delta_{jk},$$
$$1\le j\le n \text{ ಮತ್ತು } 1\le k\le n.$$

$j=1,2,\ldots,n$ ಗೆ ತನ್ನ jನೇ ನೀಟಸಾಲು X^j ಆಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯು U ಆಗಿರಲಿ; ಅಂದರೆ, $1\le i\le n$ ಮತ್ತು $1\le j\le n$ ಗೆ $U_{ij}=\beta_{ij}$. $U^*=(\alpha_{ij})$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $1\le i\le n$ ಮತ್ತು $1\le j\le n$ ಗೆ, $\alpha_{ij}=\bar{\beta}_{ji}$. ಹೀಗೆ (17) ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿರುವುದೂ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ.

(18) $$U^*U=I.$$

AU ನ j ನೇ ನೀಟಸಾಲು $TX^j=\alpha_jX^j$ ಆಗಿದೆ. [ಅಧ್ಯಾಯ 1 ರ ಭಾಗ 6 ರ (19) ನೋಡಿರಿ.] ಹೀಗೆ

$$U^*AU=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}.$$

(18)ನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆ U ವನ್ನು ಒಂದು ಏಕಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಮೇಯ 24 ರ ಮಾತೃಕೆ ರೂಪವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ:

(19) A ಯು ಒಂದು ಲಂಬ $n\times n$ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ UA^*U ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖೀಯ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಏಕಾತ್ಮಕ $n\times n$ ಮಾತೃಕೆ U ಇದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

ಮತ್ತು $A^*A = I$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $(\lambda I - A)^2 =$ (
ಆಗಿರುವಂತೆ λ ಒಂದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $A = \lambda$
ಎಂದು ನೇರ ಗಣನೆಯಿಂದ ತೋರಿಸಿರಿ. ಇದು (8) ರಲ್ಲಿ $\lambda =$
ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ T ಗೆ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವ ಒಂದು
ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವು C^2 ಗೆ ಇದೆ.

2. ಕೆಳಗಿರುವ C^3 ಮೇಲಿನ T ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಲ್ಲಿ ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣ
ಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಲಂಬವಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು?

   (a) $T(\alpha,\beta,\gamma) = (3\alpha + i\beta + (2-i)\gamma, -i\alpha + i\gamma, (2+i)\alpha - i\beta + 6\gamma)$

   (b) $T(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha, i\alpha + \beta, i\alpha - i\beta + \gamma)$

   (c) $T(\alpha,\beta,\gamma) = (\beta, \gamma, i\alpha + i\beta + i\gamma)$

   (d) $T(\alpha,\beta,\gamma) = ((2+i)\alpha - (1+2i)\beta, (1+2i)\alpha + (2+i)\beta, \gamma)$

3. $tr(A) = A_{11} + A_{22}$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $(A, B) = tr(B^*A)$ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಡನೆ V ಯು 2×2 ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವ V ಯ ಮೇಲಿನ T ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಗಳಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು? ವಿಷಮ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಗಳಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು? ಏಕಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು? ಸ್ವಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ ಪ್ರಲಂಬನಗಳಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು? ಲಂಬವಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು? [ಸೂಚನೆ: ಮೊದಲು T^* ಅನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಿರಿ. $tr(ABD) = tr(DAB)$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ.]

   (a) $C = \begin{bmatrix} i & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $TA = AC$.

(b) $C = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $TA = AC$.

(c) $C = \begin{bmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $TA = AC$.

(d) $C = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $TA = CA$.

(e) $C = \begin{bmatrix} i & 2-i \\ -2-i & 2i \end{bmatrix}$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $TA = AC-CA$.

(f) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix}$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $TA = C^*AC$.

(g) $C = \begin{bmatrix} i & 2+i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $TA = C^*AC$.

(h) $C = \begin{bmatrix} \frac{2+i}{2} & \frac{1-2i}{2} \\ \frac{1-2i}{2} & \frac{2+i}{2} \end{bmatrix}$ ಆಗಿರುವ, $TA = AC + CA$.

4\. (a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \text{ ಎಂದಿರಲಿ.}$$

A ಮತ್ತು B ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ಆದರೆ $A+B$ ಮತ್ತು AB ಗಳು ಲಂಬವಾಗಿಲ್ಲವೆಂದೂ ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) AB ಯು ಲಂಬವಾಗಿಲ್ಲದಂತೆ 2×2 ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(c) ಏಕಾತ್ಮಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಏಕಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

5\. C^2 ಅಥವಾ C^3 ಮೇಲಿರುವ ಕೆಳಗಿನ T ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು

ಇವು ಕೇವಲ T ಯು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಸ್ವ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ ಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ತಾಳೆ ನೋಡಿರಿ. (ನೋಡಿ ಅಭ್ಯಾಸ 11.)

(a) $T(\alpha,\beta)=(2\alpha-i\beta,\ i\alpha+\beta)$

(b) $T(\alpha,\beta)=(i\alpha+(1+i)\beta,\ -i\alpha+\beta)$

(c) $T(\alpha,\beta)=(i\alpha+\beta,\ -\alpha+2i\beta)$

(d) $T(\alpha,\beta,\gamma)=((2+i)\alpha-(1+2i)\beta,$
$(1+2i)\alpha+(2+i)\beta,\ \gamma)$

6. ಕೆಳಗಿರುವ 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳು A ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ, U^*AU ಯು ಕರ್ಣರೇಖೀಯವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಏಕಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆ U ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A=\begin{bmatrix} 2i & -1+i \\ 1+i & i \end{bmatrix}$

(c) $A=\begin{bmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$

7. (4) ff ನಲ್ಲಿ, T ಯು C^2 ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸ್ವ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ T ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದೆವು. ಈ ಅಭ್ಯಾಸವು ಆ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸುತ್ತದೆ.

(a) A ಯು ಒಂದು ಸ್ವ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ $n\times n$ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ A ಯ ಕರ್ಣರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ದಾಖಲಾತಿಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) T ಯು, ಅಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ (X,Y) ಯೊಡನೆ, ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಮಷ್ಟಿ V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $T=T^*$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ T ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : ಭಾಗ (a) ಮತ್ತು (19) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೊಂಡು, ಅಥವಾ ನೇರವಾಗಿ ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. TX

$= \alpha X$, $X \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(X, T^*X) = (TX, X) = \overline{(X, TX)}$ ಅನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಗಣಿಸಿರಿ.]

8. S ಮತ್ತು Tಗಳು ಲಂಬಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು $ST = TS$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ST ಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ. [**ಸೂಚನೆ :** $ST^* = T^*S$ ಮತ್ತು $S^*T = TS^*$ ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದು ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. (1) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ $T = \alpha_1E_1 + \alpha_2E_2 + \cdots + \alpha_rE_r$ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ. ಆಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು E_iಯೂ T ಯಲ್ಲಿನ ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು (13) ರಿಂದ $E_i^* = E_i$. ಹೀಗೆ $1 \leq i \leq r$ ಗೆ $SE_i = E_iS$. $T^* = \bar{\alpha}_1E_1 + \bar{\alpha}_2E_2 + \cdots + \bar{\alpha}_rE_r$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $ST^* = T^*S$ ಎನ್ನುವುದು ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.]

9. V ಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು X ಗೂ $|TX| = |T^*X|$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ :** ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೂ $((T^*T - TT^*)X, X) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಕರಣ ಸಾಮ್ಯಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. ಭಾಗ 4 ರ ಅಭ್ಯಾಸ 9 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ.]

10. ಕೇವಲ T^*ಯು T ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ :** (1) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ $T = \alpha_1E_1 + \alpha_1E_2 + \cdots + \alpha_rE_r$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (13) ರಿಂದ $T^* = \alpha_1E_1 + \bar{\alpha}_2E_2 + \cdots + \bar{\alpha}_rE_r$ ಪ್ರತಿಯೊಂದು E_i ಯೂ T ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದೆ.]

11. T ಯು ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಾಗಿರಲಿ. T ಯ ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ T ಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ :** (16) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮತ್ತು (1) ರಿಂದ T^* ಅನ್ನು ಗಣಿಸಿರಿ.]

12. ಈ ಅಭ್ಯಾಸವು ಪ್ರಮೇಯ 24 ರ ಒಂದು ಪರ್ಯಾಯ ಸಾಧನೆಯ ರೂಪರೇಖೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

(a) M ಯು T ಗೆ ಒಂದು ನಿಶ್ಚರ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $M^\perp$ಯು T^*ಗೆ ಒಂದು ನಿಶ್ಚರ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು

ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ**: X ಯು M ನಲ್ಲಿದ್ದು, Y ಯು $M^{\perp}$ದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(T^*Y, X) = (Y, TX) = 0$.]

(b) T ಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. αವು T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿರಲಿ (ಅಧ್ಯಾಯ 3 ರ ಭಾಗ 2 ರ (15) ರಿಂದ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಅಂತಹ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದೆ). $|X^1| = 1$ ನೊಡನೆ $TX^1 = \alpha X^1$ ಆಗಿರಲಿ. $\{X^1\}$ ನಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಉಪ ಸಮಷ್ಟಿಯು M_1 ಆಗಿರಲಿ. T ಮತ್ತು T^* ಗಳೆರಡಕ್ಕೂ M_1 ಮತ್ತು $M_1^{\perp}$ ಗಳು ನಿಶ್ಚರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ**: ಭಾಗ (a) ಮತ್ತು (9) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(c) M_1ಯು (b) ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇರಲಿ. $M_1^{\perp}$ನಲ್ಲಿರುವ X ಗೆ $T_1X = TX$ ನಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ $M_1^{\perp}$ ಮೇಲಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು T_1 ಆಗಿರಲಿ. T_1 ಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ: (b) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ, $M_1^{\perp}$ದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ Yಗಳಿಗೆ $T_1^*Y = T^*Y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

(d) ಭಾಗ (b) ಮತ್ತು (c) ಗಳ ಪುನರಾವರ್ತಿತ ಅನ್ವಯಗಳಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 24 ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ**: $M_1^{\perp}$ದ ರಚನೆಯು X^2ಯು T_1 ಗೆ ಉದ್ದ ಒಂದು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(X^1, X^2) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.]

ಭಾಗ 6. ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಕೆಲವು ಪರಿಣಾಮಗಳು

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಲಂಬ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ವಿವಿಧ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ವರ್ಗಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. ಮೂಲಭೂತವಾಗಿ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಇದನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ನಾವು ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ Tಯ ಯಾವುದೇ ಮಾತೃಕೆ ನಿರೂಪಣೆಗೆ, ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ಸಫಲವಾಗುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಹೀಗೆ ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಬಹುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು ಅಥವಾ Tಗೆ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಅದರ ಮಿಥ್ಯ

ಪ್ರಲಂಬನಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸಬಹುದು. ನಾವು ಎರಡನೆಯ ಉಪಕರಣವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಲಂಬಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಂತೆ ವರ್ತಿಸುತ್ತವೆ.

ಈ ಭಾಗದ ಉದ್ದಕ್ಕೂ V ಯನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಯಾಮದ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿ (X, Y) ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಉದ್ದ, ಕೋನ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಯ ಎಲ್ಲ ಉಲ್ಲೇಖಗಳೂ ಈ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೇ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಅನ್ವಯದ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಭಾಗ 5 ರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಅವು ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುವ ರೂಪದಲ್ಲೇ ಉಲ್ಲೇಖಿಸುತ್ತೇವೆ.

T ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರುವುದು ಕೇವಲ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\alpha_1, \alpha, \ldots, \alpha_r$ ಮತ್ತು ಪ್ರಲಂಬನಗಳು $E_1, E_2, \ldots, E_r$ ಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ

(a) $T = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_r E_r$

(b) $I = E_1 + E_2 + \cdots + E_r$

(1) (c) $E_i E_j = 0, \quad i \neq j$

(d) $E_i^* = E_i^2 = E_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$

ಇಷ್ಟಲ್ಲದೆ $\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ E_r ಪ್ರಲಂಬನಗಳು (a,b,c,d) ನಿರ್ಬಂಧಗಳಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.

ಇದು ಪ್ರಮೇಯ 24 ರ ಮತ್ತು ಭಾಗ 5 ರ (1) ಮತ್ತು (13) ರ ಒಂದು ಮರು ನಿರೂಪಣೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿನ (1) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವಾಗ ನಾವು $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಗ್ರಹಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಳಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶವು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಗಳ ಮೇಲಿನ ಸಮಾಂಗ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿಗೆ ನಿಜವಲ್ಲ. ಅದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಯುಗ್ಮಿತೆ ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಕರಣ ಸಾಮ್ಯಕದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳ ಒಂದು ಪರಿಣಾಮವೂ ಆಗಿವೆ. (ನೋಡಿ ಅಭ್ಯಾಸ ೪, ಭಾಗ 4).

(2) ಕೇವಲ Vಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು X ಗೆ (TX, λ)ಯು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿದ್ದರೆ T ಯು ಸ್ವ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಯಾಗಿದೆ.

$T = T^*$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $(TX,X) = \overline{(X,TX)} = \overline{(T^*X,X)} = \overline{(TX,X)}$ ಆಗುವುದರಿಂದ, (TX,X) ಯು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿದೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ, (TX,X) ಯು V ಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು X ಗೆ ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $\overline{(TX,X)} = (TX,X)$ ಆಗುವುದರಿಂದ, $(TX,X) = \overline{(X,TX)} = (X,TX)$. ಅಲ್ಲದೆ $(TX,X) = (X, T^*X)$ ಆಗುವುದರಿಂದ, $(TX,X) = (X,T^*X) = \overline{(T^*X,X)} = (T^*X,X)$.

$$\begin{aligned}(TX,Y) &= \tfrac{1}{4}(T(X+Y),X+Y) \\ &\quad - \tfrac{1}{4}((T(X-Y),X-Y) \\ &\quad + (i/4)(T(X+iY),X+iY) \\ &\quad - (i/4)(T(X-iY),X-iY) \\ &= \tfrac{1}{4}(T^*(X+Y),X+Y) \\ &\quad - \tfrac{1}{4}(T^*(X-Y),X-Y) \\ &\quad + (i/4)(T^*(X+iY),X+iY) \\ &\quad - (i/4)(T^*(X-iY),X-iY) \\ &= (X^*X,Y).\end{aligned}$$

ಹೀಗೆ ಎಲ್ಲ X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಗೂ $((T-T^*)X,Y) = 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ $T = T^*$.

ಎಲ್ಲ X ಗಳಿಗೂ $(PX,X) \geq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಪರಿಕರ್ಮಿ P ಯನ್ನು ನಾನ್ಋಣಾತ್ಮಕ ಎಂದು $X \neq 0$ ಗೆ $(PX,X) >$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಧನಾತ್ಮಕ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. $S - T$ ಯು ನಾನ್ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ, $S \geq T$ ಎಂಬ ಅಂಕಕರಣವನ್ನು ಮತ್ತು $S - T$ ಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ $S > T$ ಎಂಬ ಅಂಕಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. (2) ರಿಂದ $P \geq 0$ ಅಥವಾ $P > 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $P = P^*$ ಎಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ 24 ಒದಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 25. T ಯು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ:

(3) ಕೇವಲ T ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $T = T^*$.

(4) ಕೇವಲ T ಯು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು ≥ 0 ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $T \geq 0$.

(5) ಕೇವಲ Tಯು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು >0 ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $T > 0$.

(6) ಕೇವಲ T ಯು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು ಶುದ್ಧ ಊಹ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $T = -T^*$ (a ಮತ್ತು b ವಾಸ್ತವಿಕಗಳಾಗಿರುವಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆ $\alpha = a + ib$ಯು $a = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, **ಶುದ್ಧ ಊಹ್ಯವಾಗಿದೆ**).

(7) ಕೇವಲ T ಯು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು ನಿರಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆ 1ರದಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ಏಕಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ.

(8) ಕೇವಲ T ಯು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು 0 ಅಥವಾ 1 ಇವುಗಳಲ್ಲೊಂದಾಗಿದ್ದರೆ ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ಒಂದು ಪ್ರಲಂಬನವಾಗಿದೆ.

(9) ಕೇವಲ T ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು ಎಲ್ಲ ಅಶೂನ್ಯಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯ ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ : T ಯು (1) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರಲಿ.

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $T^* = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_r E_r = T$. $T = T^*$ ಮತ್ತು α ವು T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $TX = \alpha X$, $X \neq 0$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $\alpha(X,X) = (\alpha X, X) = (TX, X)$. (2) ರಿಂದ (TX, X) ಯು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿದೆ.

$$\alpha = \frac{(TX, X)}{(X, X)}$$

ಇರಲು α ವು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ಇದು (3) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ. $T \geq 0$ ಮತ್ತು $TX = \alpha X$, $X \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$\alpha = \frac{(TX, X)}{(X, X)} \geq 0,$$

$(TX,X) \geq 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ. $X \neq 0$ ಗೆ $(TX,X) > 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$\alpha = \frac{(TX,X)}{(X,X)} > 0.$$

ಇದು ಒಂದು ನಾನ್ಯಣಾತ್ಮಕ (ಧನಾತ್ಮಕ) ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು ನಾನ್ಯಣಾತ್ಮಕ (ಧನಾತ್ಮಕ)ವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

(1) ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು $a_i \geq 0$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. X ಯು V ಯಲ್ಲಿರಲಿ. ಆಗ $(1b)$ ಯಿಂದ $X = E_1X + E_2X + \cdots + E_rX$ ಮತ್ತು $(1a)$ ಯಿಂದ $TX = \alpha_1E_1X + \alpha_2E_2X + \cdots + \alpha_rE_rX$. ಹೀಗೆ $(1c)$ ಮತ್ತು $(1d)$ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, $(TX,X) = \alpha_1|E_1X|^2 + \alpha_2|E_2X|^2 + \cdots + \alpha_r|E_rX|^2 \geq 0$. ಪ್ರತಿಯೊಂದು $a_r > 0$ ಮತ್ತು $X \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $X = E_1X + E_2X + \cdots + E_rX$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಯಾವುದಾದರೂ i ಗೆ $|E_iX| > 0$. ಇದು (4) ಮತ್ತು (5) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.

(6) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು $S = iT$ ಆಗಿರಲಿ. ಹೀಗೆ ಕೇವಲ $T^* = -T$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $S = S^*$. T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯು α ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೇವಲ $i\alpha$ ವು S ನ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ (3) ರಿಂದ (6) ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

$T^* = \bar{\alpha}_1E_1 + \bar{\alpha}_2E_2 + \cdots + \bar{\alpha}_rE_r$ ಆಗುವುದರಿಂದ $(1b,c,d)$ ಯಿಂದ $T^*T = |\alpha_1|^2E_1 + |\alpha_2|^2E_2 + \cdots + |\alpha_r|^2E_r$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ $|\alpha_1| = |\alpha_2| = \cdots = |\alpha_r| = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(1b)$ ಇಂದ $T^*T = I$. ವಿಲೋಮವಾಗಿ $T^*T = I$ ಮತ್ತು $TX = \alpha X$, $X \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(X,X) = (T^*TX, X) = (TX,TX) = (\alpha X, \alpha X) = |\alpha|^2(X,X)$. ಹೀಗೆ $|\alpha|^2 = 1$. ಇದು (7) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.

(1) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ $T = \alpha_1E_1 + \alpha_2E_2 + \cdots + \alpha_rE_r$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು $a_i = 0$ ಅಥವಾ 1 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $T^2 = \alpha_1^2E_1 + \alpha_2^2E_2 + \cdots + \alpha_r^2E_r = T$. ವಿಲೋಮವಾಗಿ $T^2 = T$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ T ಗೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬಹುಪದಿಯು $t^2 - t$ ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸಲೇಬೇಕು. ಇದು (8) ನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಹೇಳಿಕೆ (9) ಲಂಬತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಕೇವಲ $TX=0$ಯು 0 ಗಿಂತ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರದಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ ಕೇವಲ 0 ಯು T ಯ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆ ಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

T ಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಗ್ರಹಿಕೆಯು (9)ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಪ್ರಮೇಯ 25 ರ ಎಲ್ಲ ಭಾಗಗಳಿಗೂ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ. ಪ್ರಮೇಯ 25 ರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು, ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗೆಗಿನ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಸದೃಶಗಳಾಗಿವೆ. α ವು ಒಂದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ, $\alpha = a + ib$. a ಮತ್ತು b ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಕೇವಲ $b=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $\alpha=\bar{\alpha}$; ಕೇವಲ $b=0$ ಮತ್ತು $a\geq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $a\leq 0$; ಕೇವಲ $a=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $\alpha=-\bar{\alpha}$; ಕೇವಲ $|\alpha|=1$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $\alpha\bar{\alpha}=1$; ಕೇವಲ $\alpha=0$ ಅಥವಾ 1 ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $\alpha=\alpha^2$; ಕೇವಲ $a\neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ α ವು ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಇತರ ಅನೇಕ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ಪರಿಕರ್ಮಿಸದೃಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\alpha=a+ib$ ಆಗಿದ್ದು, a ಮತ್ತು b ವಾಸ್ತವಿಕ ಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$a=\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2} \text{ ಮತ್ತು } b=\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{2i}.$$

$$T=\frac{T+T^*}{2}+i\frac{T-T^*}{2i},$$

ಇಲ್ಲಿ

$$\frac{T+T^*}{2} \text{ ಮತ್ತು } \frac{T-T^*}{2i}$$

ಎರಡೂ ಸ್ವಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಗಳಾಗಿವೆಯಾದ್ದರಿಂದ $H=H^*$ ಮತ್ತು $K=K^*$ ಇರುವಲ್ಲಿ, $T=H+iK$. ಅನೇಕ ಸಲ $H=(T+T^*)/2$ ಅನ್ನು T ಯ ವಾಸ್ತವಿಕ ಭಾಗ ಎಂದೂ, $K=(T-T^*)/2i$ ಯನ್ನು T ಯ ಊಹ್ಯ ಭಾಗ ವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವು ಲಂಬ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕನ ವಾಗಿದೆ.

(10) ಕೇವಲ $HK = KH$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

ಏಕೆಂದರೆ $T^*T = TT^*$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ $HK = KH$. ವಿಲೋಮವಾಗಿ, $HK = KH$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $T = H + iK$ ಮತ್ತು $T^* = H - iK$ ಆಗುವುದರಿಂದ $TT^* = T^*T$.

ಈಗ $\alpha \geq 0$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ α ವು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿಗೆ ಕೆಳಗಿನವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ:

(11) $Q^2 = P$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಕೇವಲ ಒಂದು $Q \geq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $P \geq 0$. ಇಷ್ಟಲ್ಲದೆ $P \geq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ Q ಯು $Q \geq 0$ ಮತ್ತು $Q^2 = P$ ನಿರ್ಬಂಧಗಳಿಂದ ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ನಾವು Q ವನ್ನು P ಯ **ನಾಸ್ಪೃಣಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಮೂಲ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. (11) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು, $P = T^*T$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(PX, X) = (T^*TX, X) = (TX, TX) \geq 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಹೀಗೆ $Q \geq 0$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $P = Q^2$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $P \geq 0$. ವಿಲೋಮವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು (1) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ $P = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_r E_r$ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ. $P \geq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು $a_i \geq 0$. $Q = \sqrt{\alpha_1} E_1 + \sqrt{\alpha_2} E_2 + \cdots + \sqrt{\alpha_r} E_r$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $(1c)$ ಮತ್ತು $(1d)$ ಇವುಗಳಿಂದ $Q = Q^*$ ಮತ್ತು $Q^2 = P$. ಭಾಗ 5 ರ (1) ರಿಂದ, ಕೇವಲ ಯಾವುದಾದರೂ i ಗೆ, $1 \leq i \leq r$, $\alpha = \sqrt{\alpha}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ α ವು Qನ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ. $Q \geq 0$ ಎಂಬುದು (4) ರಿಂದಾಗಿದೆ.

$Q_1 \geq 0$ ಮತ್ತು $Q_1^2 = P$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಮುಂದಿನದನ್ನು ಪಡೆಯಲು Q_1ಗೆ (1)ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿರಿ: $i = 1, 2, \ldots, k$ ಗೆ $i \neq j$, $F_i^2 = F_i = F_i^* \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $F_i F_j = 0$ ಆಗಿದ್ದು, $I = F_1 + F_2 + \cdots + F_k$ ಆಗಿದ್ದು, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಲ್ಲಿ $Q_1 = \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \cdots + \beta_k F_k$. (4) ರಿಂದ ನಾವು $1 \leq i \leq k$ ಗೆ $\beta_i \geq 0$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಹೀಗೆ $P = Q^2 = \beta_1^2 F_1 + \beta_2^2 F_2 + \cdots + \beta_k^2 F_k$. $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ ಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿದ್ದು ≥ 0 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\beta_1^2, \beta_2^2, \ldots, \beta_k^2$ ಗಳನ್ನು ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೊಂದಿರಲೇಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳ ಏಕೈಕತೆಯು $k = r$ ಎಂದೂ, ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಮರುಜೋಡಣೆಮಾಡಿ, $1 \leq$

$\leq r$ ಗೆ $E_i = F_i$, $\beta_i = \alpha_i$ ಎಂದೂ ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $Q_1 = Q$. ಇದು (11) ನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತದೆ.

a ಮತ್ತು b ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿರುವಲ್ಲಿ $\alpha = a + ib$ ಆಗಿದ್ದರೆ; ಆಗ $\alpha = 0$ ಅಥವಾ

$$\alpha = |\alpha| \frac{\alpha}{|\alpha|}.$$

$\alpha \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$\left|\frac{\alpha}{|\alpha|}\right| = 1.$$

ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ $|u| = 1$ ಮತ್ತು $r \geq 0$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $\alpha = ru$. ಇದೂ ಕೂಡ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿ ಸದೃಶವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇಂಥದೇ ಒಂದು ಫಲಿತಾಂಶವು ಅಲಂಬ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿಗೂ ಸಫಲವಾದರೂ ಕೂಡ ಇದನ್ನು ಕೇವಲ ಲಂಬ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

(12) T ಯು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $P \geq 0$, $P^2 = T^*T$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ $T = UP$ ಮತ್ತು U ಏಕಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ. T ಯು ವ್ಯಸ್ತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ U ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ. ಇಷ್ಟಲ್ಲದೆ, $UP = PU$, $TU = UT$, ಮತ್ತು $TP = PT$.

(1) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ $T = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_r E_r$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $i = 1, 2, \ldots, r$ ಗೆ $E^*_i = E_i$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $T^* = \bar{\alpha}_1 E_1 + \bar{\alpha}_2 E_2 + \cdots + \bar{\alpha}_r E_r$. ಹೀಗೆ, ($1c$) ಮತ್ತು ($1d$) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡಲ್ಲಿ $T^*T = |\alpha_1|^2 E_1 + |\alpha_2|^2 E_2 + \cdots + |\alpha_r|^2 E_r$ ಎಂದಾಗಿದೆ. $P = |\alpha_1| E_1 + |\alpha_2| E_2 + \cdots + |\alpha_r| E_r$ ಆಗಿರಲಿ. ಪ್ರಮೇಯ 25 ರಿಂದ, $P \geq 0$, ಅಲ್ಲದೆ $P^2 = T^*T$. ಪ್ರತಿಯೊಂದು i ಗೆ $a_i \neq 0$ ಆಗಿರಲಿ.

$$U = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} E_1 + \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|} E_2 + \cdots + \frac{\alpha_r}{|\alpha_r|} E_r \text{ ಎಂದಿರಲಿ.}$$

ಆಗ $T = UP$. ಯಾವುದಾದರೂ i ಗೆ $a_i = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\alpha_1 = 0$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆಗ $i > 1$ ಗೆ $a_i \neq 0$.

$$U = E_1 + \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|} E_2 + \cdots + \frac{\alpha_r}{|\alpha_r|} E_r.$$

ಮತ್ತು $T = UP$. ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ U ಏಕಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಪ್ರಮೇಯ 25 ರಿಂದ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಪ್ರಮೇಯ 25 ರಿಂದ $i = 1,2,\ldots,r$ ಗೆ $\alpha_i \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ T ಯು ವ್ಯಸ್ತವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $U = TP^{-1}$ ಆಗುವುದರಿಂದ U ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ. U ಮತ್ತು P ಯ ರಚನೆಯು $UP = PU$, $UT = TU$ ಮತ್ತು $PT = TP$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

T ಯು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, f ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(T)$ ಯ ಗಣನೆಯು ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. (1) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ $T = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_r E_r$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (1c) ಮತ್ತು (1d) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, $T^2 = \alpha_1^2 E_1 + \alpha_2^2 E_2 + \cdots + \alpha_r^2 E_r$. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ, ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $k \geq 1$ ಗೆ $T^k = \alpha_1^k E_1 + \alpha_2^k E_2 + \cdots + \alpha_r^k E_r$. ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಂದ

$$(13) \qquad f(T) = f(\alpha_1)E_1 + f(\alpha_2)E_2 + \cdots + f(\alpha_r)E_r.$$

$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_r)$ ಗಳು ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವಂತೆ f ಯು ಯಾವುದೇ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(T)$ ಯನ್ನು ಸೂತ್ರ (13) ರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ $f(T)$ ಯನ್ನು ಗಣಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ T ಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು T ಯ ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳನ್ನು ಗಣಿಸುವುದು ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. $f(T)$ ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದಲ್ಲಿ ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಹೊಸದೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಅದು ಕೇವಲ T ಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ವಿವಿಧ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸುವ ಸಾಧನ ಮಾತ್ರವಾಗಿದೆ. ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದ ಗಣನಾತ್ಮಕ ಮಹತ್ವವು ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳಲ್ಲಿ ಹುದುಗಿದೆ.

(a) $(f+g)(T) = f(T) + g(T)$,

(b) $(\alpha f)(T) = \alpha f(T)$,

(c) $(fg)(T) = f(T)g(T)$.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $f(\alpha) = e^{\alpha}$ ಮತ್ತು $g(\alpha) = e^{-\alpha}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(T) = e^{\alpha_1}E_1 + e^{\alpha_2}E_2 + e^{\alpha_r}E_r + \cdots +$ $g(T) = e^{-\alpha_1}E_1 + e^{-\alpha_2}E_2 + \cdots + e^{-\alpha_r}E_r$; ಮತ್ತು $f(T)g(T) = E_1 + E_2 + \cdots + E_r = I$. $f\,g(\alpha) = 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಫಲಿತಾಂಶವೂ ಕೂಡ (14c) ಯಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತವೆ. ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಕೊಡಬಹುದು ಅಥವಾ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು C ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1. ಕೆಳಗಿರುವ C^2 ಮೇಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸ್ವಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಗಳಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು? ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು? ನಾನ್ಯೃಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು? ಪ್ರಲಂಬನಗಳಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು?

(a) $T(\alpha,\beta)=(\alpha+i\beta,-i\alpha+\beta)$

(b) $T(\alpha,\beta)=((2i+2)\alpha+(-1+2i)\beta,$
$(1-2i)\alpha+i\beta)$

(c) $T(\alpha,\beta)=(\alpha+i\beta,-i\alpha)$

(d) $T(\alpha,\beta)=(2i\alpha-\beta,(1+i)\alpha+(2-2i)\beta)$

(e) $T(\alpha,\beta)=(i\alpha+(i+1)\beta,-i\alpha+(i+1)\beta)$

(f) $T(\alpha,\beta)=(\alpha+(1+i)\beta,(1-i)\alpha+\beta)$

(g) $T(\alpha,\beta)=\left(\dfrac{i\alpha+\beta}{\sqrt{2}},\ \dfrac{\alpha+i\beta}{\sqrt{2}}\right)$

(h) $T(\alpha,\beta)=\left(\dfrac{\alpha+i\beta}{2},\ \dfrac{-i\alpha+\beta}{2}\right)$

2. ಕೇವಲ $T=(T+T^*)/2$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $T=T^*$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : $(T-T^*)/2i=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

3. S ಮತ್ತು Tಗಳು ರೇಖೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(SX,X)=(TX,X)$ V ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗೆ ಕೇವಲ $S=T$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ** : (2) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.]

4. ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧ $(A,B)=t_r(B^*A)$ ಯೊಡನೆ V ಯು 2×2 ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. (ನೋಡಿರಿ ಅಭ್ಯಾಸ 3, ಭಾಗ 5) ಕೆಳಗಿರುವ V ಯ ಮೇಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಲ್ಲಿ

ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಏಕಾತ್ಮಕವಾಗಿ ವುವು ಯಾವುವು ? ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು ? ವಿಷ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಗಳಾಗಿರುವುವು ಯಾವುವು ?

(a) $C=\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $TA=AC-CA$.

(b) $C=\begin{bmatrix}i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $TA=AC-CA$.

(c) $C=\begin{bmatrix}1 & i\\ -i & 0\end{bmatrix}$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $TA=C^*AC$.

(d) $C=\begin{bmatrix}2i+1 & i-1\\ 1-i & i\end{bmatrix}$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $TA=AC$

5. $T(\alpha,\beta)=((3i+6)\alpha+(2-7i)\beta,\ 6i\alpha-\beta)$ ಆಗಿರಲಿ. C^2 ಯು ಶಿಷ್ಟ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಗ್ರಹಿಸಿ T ಯ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮತ್ತು ಊಹ್ಯ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. (a) $P_1\geq 0$ ಮತ್ತು $P_2\geq 0$ ಮತ್ತು $P_1P_2=P_2P_1$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $P_1P_2\geq 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : ಭಾಗ 1 ರ (11) ಮತ್ತು (13) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು P_1P_2 ವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಬಳಸಿರಿ. ಆನಂತರ ಪ್ರಮೇಯ 25 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

7.

$$P=\begin{bmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{bmatrix}.$$

$P\geq 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ; P ಗೆ ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು P ಯ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. (a) $T^*T\geq 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) P ಯು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು P ಯ ಎಲ್ಲ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳು α ಗಳಿಗೂ $0\geq\alpha\leq 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $P\geq 0$ ಮತ್ತು $I\geq P$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

9. C^2 ಯು ನಿಯುತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರಲಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನಂತಿರಲಿ

$$T(\alpha,\beta) = (2i\alpha - \beta, \alpha + i\beta).$$

T^*T ಯ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (೨) ಸಫಲವಾಗುವಂತೆ P ಮತ್ತು V ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $PU = UP$ ಎಂದು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

10. ಕೆಳಗಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (5), (6), (7) ಮತ್ತು (8) ರಲ್ಲಿ, ಕ್ರಮವಾಗಿ ಲಂಬತ್ವದ ಅಭಿಗ್ರಹಿಕೆಯು ಅವಶ್ಯಕ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ತೋರಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(a) $T(\alpha,\beta) = (\alpha + i\beta, 2\beta)$

(b) $T(\alpha,\beta) = (i\alpha, i\alpha + 2i\beta)$

(c) $T(\alpha,\beta) = (i\alpha + \beta, i\beta)$

(d) $T(\alpha,\beta) = (\alpha + \beta, \beta)$

11. T ಯು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದು, $T = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_r E_r$ (1) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ವಿಶಿಷ್ಟಗಳೊಡನೆ ಮತ್ತು $\alpha_1 = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ U ಮತ್ತು P ಗಳು (12) ನ್ನು ಪಾಲಿಸುವಂತೆ ಅನೇಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು U ಇವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ :

$$U = iE_1 + \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|} E_2 + \cdots + \frac{\alpha_r}{|\alpha_r|} E_r \text{ ಯು}$$

(12) ರ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಂತಹ ಪರಿಕರ್ಮಿಯ ಹಾಗೆ ಅದೇ ನಿರ್ಬಂಧಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ.]

12. (a) a ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $a \geq 0$ ಅಥವಾ $a < 0$. $T \geq 0$ ಮತ್ತು $-T \geq 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸ್ವಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ ಪರಿಕರ್ಮಿ T ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯು

ವುದರಿಂದಲೇ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವ ಸಾದೃಶ್ಯವು ಪೂರ್ಣವಾಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚ (4) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

(b) T ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸ್ವಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ ಪರಿಕರ್ಮಿ ಯಾಗಿರಲಿ. (V ಸಾಂತ ಆಯಾಮೀಯ), $P_1 \geq 0, P_2 \geq$ ಮತ್ತು $T = P_1 - P_2$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯ ಮೇಲೆ P_1 ಮತ್ತು P_2 ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ (1) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ $T = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_r E$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $a_i \geq 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ P_1 ಯು ಆ $a_i E_i$ ಗಳ ಮೊತ್ತ ವಾಗಿರಲಿ.]

13. ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ $X \cdot Y$ ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುವ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣ ಲಬ್ಧದೊಡನೆ V ಯು ಒಂದು ಸಾಂತ ಆಯಾಮದ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ.

(a) $P \geq 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ P ಯು V ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮಿ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $h(X, Y) = PX \cdot Y$ ಆಗಿರಲಿ. $h(X, Y) = \overline{h(Y, X)}$; $h(\alpha X^1 + \beta X^2, Y) = \alpha h(X^1, Y) + \beta h(X^2, Y)$ ಮತ್ತು $h(X, X) \geq 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(b) $h(X, Y) = \overline{h(Y, X)}$, $h(\alpha X^1 + \beta X^2, Y) = \alpha h(X^1, Y) + \beta h(X^2, Y)$ ಮತ್ತು $h(X, X) \geq 0$ ಅನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ, ಎರಡು ಸದಿಶ ಚರಾಂಕಗಳು X ಮತ್ತು Y ಗಳ ಒಂದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಮೌಲ್ಯೀಕೃತ ಉತ್ಪನ್ನವು $h(X, Y)$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $h(X, Y) = PX \cdot Y$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಪರಿಕರ್ಮಿ P ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಅಲ್ಲದೆ $P \geq 0$ ಎಂದೂ ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : X ಅನ್ನು ಸ್ಥಿರಗೊಳಿಸಿ ಮತ್ತು $f(Y) = h(\overline{X, Y})$ ಆಗಿರಲಿ. ಪ್ರಮೇಯ 16 ನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ $\overline{f(Y)} = X' \cdot Y$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಏಕೈಕ ಸದಿಶ X' ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. X' ಅನ್ನು PX ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಿರಿ.]

14.

$$A = \begin{bmatrix} i/2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & i/2 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \frac{1}{1-t}, \quad g(t) = \frac{1}{1+t^2},$$

$h(t) = 3i(1-t^2), \quad k(t) = t^4 + 2t + 1, \quad m(t) = t^{10}.$ ಎಂದಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿರುವುವು ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆಯೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ. ಹಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಗಣಿಸಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ:** A ಯ ಮಿಥ್ಯ ಪ್ರಲಂಬನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.]

(a) $g(A)$

(b) $f(A)h(A)$

(c) $(kg)(A)$

(d) $m(A)$

(e) $h(A)k(A)m(A)(f(A))^2$

15.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}. \text{ ಎಂದಿರಲಿ;}$$

(a) $AB = BA$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ ಸ್ವಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ B ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) A ಯು C ಯ ವಾಸ್ತವಿಕ ಭಾಗವಾಗಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ ಲಂಬ ಮಾತೃಕೆಗಳು C ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [**ಸೂಚನೆ:** ಭಾಗ (a) ಮತ್ತು (10) ನ್ನು ಬಳಸಿರಿ.]

16.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \text{ಎಂದಿರಲಿ.}$$

ಕೇವಲ $\beta = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ A ಯು ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ ಇದರ ಒಂದು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

17. V ಯು (X, Y) ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಡನೆ ಒಂದು ಸಾಂತ ಆಯಾಮದ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸದಿಶ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿರಲಿ. T ಯು V ಯ ಮೇಲಿರುವ ರೇಖೀಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ T ಯ ಮಾತೃಕೆಯು

ನಿಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋಣೀಯವಾಗಿರುವಂತೆ V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರವಿದೆ. ಈ ಅಭ್ಯಾಸದ ಭಾಗಗಳು ಇದರ ಒಂದು ಸಾಧನೆಗೆ ದಾರಿ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

(a) T^*ನ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯು α_1 ಆಗಿರಲಿ $|X^1| = 1$ ಮತ್ತು $T^*X^1 = \alpha_1 X^1$ ಆಗಿರುವಂತೆ V ಯಲ್ಲಿ X^1 ಇರಲಿ. X^1 ನಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು M_1 ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಿ. $M_1^\perp$ವು T ಗೆ ಒಂದು ನಿಶ್ಚರ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : ನೋಡಿ ಅಭ್ಯಾಸ 12, ಭಾಗ 5.]

(b) $M_1^\perp$ಕ್ಕೆ T ಯ ಮಿತಿಯನ್ನು T_1 ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಿ, ಅಂದರೆ, $M_1^\perp$ ದಲ್ಲಿರುವ X ಗೆ, $T_1X = TX$. T_1^*ನ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಬೆಲೆಯು α_2 ಆಗಿರಲಿ $|X^2| = 1$ ಮತ್ತು $T_1^* X^2 = \alpha_2 X^2$ ಆಗಿರುವಂತೆ $M_1^\perp$ದಲ್ಲಿ X^2 ಅನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರಿ. X^2 ನಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯನ್ನು M_2 ನಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಿರಿ. $M_1^\perp$ ದಲ್ಲಿ M_2ನ ಲಂಬೀಯ ಪೂರಕವನ್ನು $(M_2^\perp)_1^\perp$ ಸಂಕೇತಿಸಲಿ; ಅಂದರೆ, $(X, X^2) = 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ $M_1^\perp$ ದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ X ಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು $(M_2^\perp)_1^\perp$ ಆಗಿದೆ. T_1ಗೆ $(M_2^\perp)_1^\perp$ ಯು ಒಂದು ನಿಶ್ಚರ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಮತ್ತು $dim\ (M_2^\perp)_1^\perp = dim\ V - 2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : $dim\ (M_2^\perp)_1^\perp = dim\ M_1^\perp - 1$.]

(c) $(M_2^\perp)_1^\perp$ ಕ್ಕೆ T_1 ನ ಮಿತಿಯನ್ನು T_2 ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಿರಿ ಮತ್ತು T_2 ಮತ್ತು $(M_2^\perp)_1^\perp$ ಗೆ ಭಾಗ (b) ಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಈ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನದ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯು $i = 1, 2, \ldots, n$ ಗೆ $\{X^i, X^{i+1}, \ldots, X^n\}$ ನ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಸಂಯೋಜನೆಯು TX^i ಆಗಿರುವಂತೆ V ಗೆ ಒಂದು ಸಮಲಂಬೀಯ ಆಧಾರ $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ ಗೆ ದಾರಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ. T ಯು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಈ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವು ಭಾಗ 5 ರ ಅಭ್ಯಾಸ 2 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತಹದೇ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

1 ಮತ್ತು 2ನೇ ಭಾಗಗಳ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು *Courant and Hilbert* [5] ನಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ. ಭೌತ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿನ ಅನೇಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ದ್ವಿರೇಖಾತ್ಮಕ ರೂಪಗಳ ಬಗೆಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ರೂಪಾಂತರಿಸಬಹುದೆಂದು ಈ ಪುಸ್ತಕವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇತರ ಅನ್ವಯಗಳು ಮತ್ತು ಇನ್ನಷ್ಟು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು *Smirnov* [24, ಅಧ್ಯಾಯ 4] ರಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. *Smirnov* ನ ಪುಸ್ತಕದ *III* ನೇ ಭಾಗವು ಲಂಬೀಯ ಮತ್ತು ಲೊರೆಂಟ್ಸ್ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯಗಳ ಒಂದು ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ನಿರಂಕುಶ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳ ಮೇಲೆ ದ್ವಿರೇಖಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ರೂಪಗಳ ಒಂದು ಪರಿಪೂರ್ಣ ಬೈಜಿಕ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು *Jacobson* [15, ಅಧ್ಯಾಯಗಳು 5 ಮತ್ತು 6] ನಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಭಾಗ 3 ರ ಅಭ್ಯಾಸ 9 ರ ಒಂದು ಅನ್ವಯವನ್ನು *Cramer* [6, ಪು. 184 *ff*] ನಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು.

ಅನಂತ ಆಯಾಮದ ಪ್ರಸಂಗಕ್ಕೆ 25 ಮತ್ತು 26ನೇ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಒಂದು ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು *Berberian* [2] ನಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಧ್ರುವವಿಭಜನೆಯನ್ನು [ಭಾಗ 5 ರ (12)] ದತ್ತ ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟಿಸುವ ಸಂಬಂಧವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಲಂಬತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆ ದೊರಕಿಸಬಹುದು. ಇದರ ಒಂದು ಸಾಧನೆಗಾಗಿ *Hoffman and Kunze* [14, ಪು. 279 *ff*] ನೋಡಿ.

ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು, $f(T)$ ಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಹುಪದಿಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಲಂಬಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಪರ್ಯಾಯ ಹಾದಿಗಳು *Courant and Hilbert* [5] ನ ಟೀಕಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು *Jacobson* [15, ಅಧ್ಯಾಯ 6] ನಲ್ಲಿ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ.

ಆಧಾರ ಗ್ರಂಥಗಳ ಪಟ್ಟಿ

1. AITKEN, A. C., Determinants and Matrices. 3rd ed., New York: Inter science, 1944.

2. BFRBERIAN, S., Introduction to Hilbert Space. New York: Oxford University Press, 1961.

3. CHURCHILL, R. V., *Operational Mathematics.*, 2nd en., New York: McGraw-Hill, 1958.

4. CHURCHILL, R. V., *Introduction to Complex Variables and Applications.* New York: McGraw-Hill 1948.

5. COURANT, R. and D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics.* Vol. 1, New York: Interscience, 1953.

6. CRAMER, H., The Elements of Probabiiity. New York: Wiley, 1955.

7. ERDELYI. A., Operational Calculus and Generalized Functions. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1962.

8. FADDEEVA, V. N., Computational Methods of Linear Algebra. C. D. Benster, translator, New York: Dover, 1959.

9. FICKEN, F.A., The Simplex Method of Linear Programming. New York: Hoit, Rinehart. and Winston, 1961.

10. FRIEDMAN, B., Principles and Techniques of Applied Mathematics. New York: Wiley. 1956.

11. GAGTMACHER, F. R., Applications of the Theory of Matrices. Translated by J. L. Brenner with the assistance of D W. Bushaw and S. Evanusa. New York: Interscience, 1959.

12. GUILLEMIN. E. A., Intruductory Circuit Theory. New York: Wiley, 1953.

13. HALMOS. P., Finite - Dimensional Vector Spaces. Second Print, Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1958.

14. HOFFMAN, K, and R KUNZE, Linear Algebra. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1961.

15. JACOBSON, N., Lectures in Abstract Algebra. Vol. 2, New York, Van Nostrand, 1953.

16. KAPLAN. W, Ordinary Differential Equations. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958.

17. KAPLAN, W., Advanced Calculus. Reading, Mass.: Addision-Wesley. 1953.

18. KLEIN. F., Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint, Geometry. E. R. Hedrick and C.A. Noble, translators New York: Dover, 1939.

19. LANCZOS, C., Applied Analysis. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1956.

20. LOVITT, W. V., Linear Integral Equations. New York: Dover, 1950.

21. NICKERSON, H. K., D. C. SPENCER, and N. E. STEENROD, Advanced Calculus. Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1959.

22. ROBINSON, G., Vector Geometry. Boston: Allyn and Bacon, 1962.

23. RUDIN, W., Principles of Mathematical Analysis. New York: McGraw-Hill, 1953.

24. SMIRNOV, V. I., Linear Algebra and Group Theory. Revised. edited, and adapted by R. A. Silverman. New York: McGraw-Hill, 1961.

25. TOLSTOV, G. P., Fourier Series. R. A. Silverman, translatos, Englewood Cliffs, N. J : Prentice-Hall, 1961.

ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿದ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಗಳು

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಭಾಗ 1

1. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 9 & 12 & -8 \\ 12 & 62 & -3 \\ -3 & 8 & -2 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ a^2 & a^2 & a^2 \end{bmatrix}$

2. ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ ರೂಪಗಳು.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. (a) $x_1 = -\frac{1}{2}x_3$
$x_2 = -\frac{3}{2}x_3$ (c) $x_1 = x_3 + 3x_4$
$x_2 = -2x_3 - 3x_4$

4. (a) ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(c) ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(e) ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ.

(g) ಅಕ್ಷುದ್ರ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

6. (a) $x_1 = -\frac{3-i}{2}x_3, \quad x_2 = \frac{1-3i}{2}x_3$

13. ಒಂದು 3×3 ವ್ಯೂಹಕ್ಕೆ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹದಿನೆಂಟು.

ಭಾಗ 2

1. (a) ಪರಿಹಾರಗಳು ಇಲ್ಲ.

 (c) $x = \frac{3}{4}, \quad y = \frac{5}{4}, \quad z = \frac{3}{4}$

 (e) $x = \frac{2}{3}w + \frac{1}{3}, y = -\frac{4}{3}w + \frac{1}{3}, \quad z = -3w$

 (g) $x = 2, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad w = -1$

 (i) $x = y + 2$

2. (a) ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರಗಳು (c) ಪರಿಹಾರಗಳಿಲ್ಲ.

3. (a) $y_1 - y_2 - y_3 + 3y_4 = 0$

 (c) $y_1 + y_3 = 0$

4. (a) $x = (7-2i)/3, \quad y = (-2-i)/3$

 (c) ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ.

ಭಾಗ 3

6. (a) ಇಲ್ಲ. (c) 0,1,2,3.

7. (a) ನಿರವಲಂಬಿತ (c) ಅವಲಂಬಿತ (e) ನಿರವಲಂಬಿತ

8. (a) ಅವಲಂಬಿತ (c) ನಿರವಲಂಬಿತ (e) ನಿರವಲಂಬಿತ

9. (a) ನಿರವಲಂಬಿತ (c) ಅವಲಂಬಿತ

10. (a) ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಂಯೋಜನೆ ಅಲ್ಲ.

 (c) $(4, 2, 1, 0) = 2(6, -1, 2, 1) + (1, 7, -3, -2) - 3(3, 1, 0, 0) + 0(3, 3, -2, -1)$

11. (a) M ಗೆ ಆಧಾರ $= \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$.

 V ಗೆ ಆಧಾರ $= \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

(c) $M=V$.

(e) M ಗೆ ಆಧಾರ $=\{t-1,\ t^2+1\}$.

V ಗೆ ಆಧಾರ $=\{t-1,\ t^2+1,\ 1\}$.

(ಹಾಗೆಯೇ ಅನೇಕ ಇತರ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ.)

12. (a) $[1 \quad 0 \quad -1]$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. (a) ಸ್ಥಾನ $=2$.
ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಆಧಾರ $=\{(2,1),(1,2)\}$.
ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯು ಸೊನ್ನೆ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

(c) ಸ್ಥಾನ $=3$.
ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಆವಾರ $=\{(1,0,0,\frac{22}{15}),\ (0,1,0,\frac{1}{15}),\ (0,0,1,-\frac{42}{15})\}$.

ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಆಧಾರ $=\{(-\frac{22}{15},-\frac{1}{15},\frac{42}{15},1)\}$.

14. ಅನೇಕ ಆಯ್ಕೆಗಳು ಸಾಧ್ಯ. ಕೆಳಗಿನವು ಕೆಲವು ಸರಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(a) $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ (c) $\{x, y, z\}$

(e) $\{l_1, l_2\}$, ಇಲ್ಲಿ l_1 ಮತ್ತು l_2 ಗಳು 0 ಮೂಲಕ ಹಾ ಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು l_1 ನಿಂದ l_0 ಗೆ ಇರುವ ಲಂಬವು l_2ನಿ l_0 ಗೆ ಇರುವ ಲಂಬಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಆಗಿಲ್ಲ.

ಭಾಗ 4

1. (a) ರೇಖಾತ್ಮಕ (c) ರೇಖಾತ್ಮಕ ಅಲ್ಲ.
(e) ರೇಖಾತ್ಮಕ ಅಲ್ಲ. (g) ರೇಖಾತ್ಮಕ.

4. (2a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ಅಥವಾ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ಸ್ಥಾನ ವಿನ್ಯಾಸದ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿ.

(2c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (3c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. (a) $n=m=3$; $T(x, y, z)=(3x+y+2z, y+z, -x+y+z)$

(c) $n=3, m=2$; $T(x,y,z)=(2x+y+z, x+y+z)$

7. (a) ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು R^3 ಆಗಿದೆ; ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯು ಸೊನ್ನೆ ಉಪಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

(c) ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಸಮತಲ $x+y=0$ ಆಗಿದೆ; ರೇಖೆ $x=t$, $y=-t$, $z=0$ ಇದು ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

8. (a) ಸ್ಥಾನ $=2$, ಶೂನ್ಯತೆ $=1$.

(c) ಸ್ಥಾನ $=2$, ಶೂನ್ಯತೆ $=1$.

9. (a) ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಆಧಾರ $=\{(2,1), (-1,1)\}$.
ಶೂನ್ಯ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಆಧಾರ $=\{(-1, -2, 1)\}$.

(c) ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಆಧಾರ $=\{(3, -1, 0), (2, 1, 5)\}$.
ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಆಧಾರ $=\{(1, 1, -5)\}$.

10. (a) $T(x,y)=(-x+4y, -x+5y)$
$T(1, 0)=(-1, -1)$

12. (a)
$$ST(x, y, z) = (3x + 4y - z,\ 0,\ x)$$
$$TS(x, y, z) = (3x - y,\ z,\ 3x - y)$$
$$(S+T)(x, y, z) = (4x - 2y,\ y + z,\ x + z)$$
$$(3S^2 - 2T^2)(x, y, z) = (27x - 9y + 4z,\ -4x - 2z,\ -2x + 4y + 5z)$$

(c)
$$ST(x, y, z) = (4x + 4y,\ 0,\ z)$$
$$TS(x, y, z) = (3x - y,\ -3x + y,\ z)$$
$$(S+T)(x, y, z) = (4x,\ -x - y,\ 2z)$$
$$(3S^2 - 2T^2)(x, y, z) = (27x - 9y,\ 0,\ z)$$

13. (a) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$

14. ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿವೆ. ಸರಳವಾಗಿರುವ ಕೆಲವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

(a) $T(x, y, z) = (y, z, 0)$ (c) $T = I$

(e) $T = I,\ S(x, y, x) = (x, y, z)$

(g) $S(x, y, z) = (x + y + z,\ y + z,\ z)$,
$T(x, y, z) = (x,\ y,\ -z)$

ಭಾಗ 5

2. (a) $T^{-1}(x, y, z) = (x - y,\ y - z,\ z)$

(c) ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಅಲ್ಲ.

3. (a) ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಅಲ್ಲ.

(c) (0, 0, 0) ಬಿಂದುಗಳು (1, 1, 1) ಮತ್ತು (0, 0, 0 ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಸುತ್ತ $-\pi/2$ ರಷ್ಟು ಆವರ್ತನೆಯು T^{-1} ಆಗಿದೆ.

4. (a) ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಅಲ್ಲ.

5. (a) T^{-1} ನ ಮಾತೃಕೆಯು $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

(c) ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಅಲ್ಲ.

(e) T^{-1} ನ ಮಾತೃಕೆಯು $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(g) $a^2 \neq 3$ ಆಗಿದ್ದರೆ ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ. T^{-1}ನ ಮಾತೃಕೆಯು

$$\begin{bmatrix} \frac{a+1}{a^2-3} & \frac{-2}{a^2-3} \\ \frac{-1}{a^2-3} & \frac{a-1}{a^2-3} \end{bmatrix}$$ ಆಗಿದೆ.

12. (a) ಒಂದು ಪ್ರತಿಬಿಂಬನ ಅಲ್ಲ.

(c) ಒಂದು ಪ್ರತಿಬಿಂಬನ ಅಲ್ಲ.

13. (a) ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (a_0, a_1, a_2)$.

ಭಾಗ 6

1. (a) $\begin{bmatrix} 6 & 9 \end{bmatrix}$

(c) $$\begin{bmatrix} 12+\pi+3\sqrt{2} & 2+2\pi+\sqrt{2} & 2+\pi & 2+\sqrt{2} & 3+\pi & 3+\pi \\ 3+\sqrt{2} & 1-2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1 & 3-\sqrt{2} & 3-\sqrt{2} \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{40} & -\frac{1}{84} \\ \frac{103}{630} & \frac{317}{3528} \end{bmatrix}$ (k) $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

(m) $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (o) $\begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 21 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. (a) ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಅಲ್ಲ.

(c) $\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 5 & -12 & -6 \\ -2 & 0 & 12 \\ -1 & 12 & 6 \end{bmatrix}$

(e) $\frac{1}{23}\begin{bmatrix} -2 & -7 & 7 & 7 & 9 \\ 10 & 12 & -35 & -12 & 1 \\ -15 & -18 & 18 & 41 & 10 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 8 & 15 & -8 & -7 \end{bmatrix}$

8. (a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಅಲ್ಲ.

10. (a) $a \neq 1$ ಮತ್ತು $a \neq -3$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ.

(c) ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವಿಕ λ ಗೆ ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ.

16. (a) (3, 7, – 6) (c) (1, 1, 1, 0, 1, 2)

17. (a) ನಿರವಲಂಬಿತ (c) ಅವಲಂಬಿತ

18. (a) ಅವಲಂಬಿತ

20. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

21. (a) (1, 1, 0)

22. (b) (1, 4, 15, 40)

23. (a) 1 3, − 1) (c) (6, 1, −1)

24. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

25. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

27. (a) $\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ಅಧ್ಯಾಯ 2

ಭಾಗ 1

2. (a) $4\mathbf{i}+\mathbf{k}$ (c) -8

(e) $-18/5\sqrt{14}$ (g) $2\|\mathbf{v}_1\|^2 + 2\|\mathbf{v}_2\|^2 = 26$

(i) $\frac{1}{3}\mathbf{v}_1$

4. (b) $ax+by+cz = \dfrac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ಅಥವಾ

$$ax+by+cz = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

(e) $\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}$

6. $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1/|\mathbf{v}_1|^2$ ಇದು $\mathbf{v}_1\neq 0$ ಮತ್ತು $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_2-(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1/|\mathbf{v}_1|^2$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, ಈ ಪ್ರಲಂಬನವು $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1/|\mathbf{v}_1|^2+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_3)\mathbf{v}_3/|\mathbf{v}_3|^2$ ಆಗಿದೆ. ಇದ್ದರಿಂದ $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3=0$.

ಭಾಗ 2

6. (a) -16 (c) $\sqrt{7}$ (e) $-\frac{2}{7}Y$ (g) $5/\sqrt{42}$

7. (a) -79 (c) $\sqrt{29}$ (e) $-\frac{23}{89}Y$ (g) $27/\sqrt{28\cdot 29}$

8. (a) $\frac{397}{924}$ (c) $1\sqrt{11}$ (e) $\frac{55}{4095}Y$ (g) $\sqrt{33}/42$

11. (b) ಸಮಾನಾಂತರ, $(-1/\pi)\sin 2\pi t$.
ಲಂಬ, $t+(1/\pi)\sin 2\pi t$.

ಭಾಗ 3

(a) ಲಂಬೀಯ ಅಲ್ಲ. (c) ಸಮಲಂಬೀಯ

2. (b) ಸಮಲಂಬೀಯ. (d) ಲಂಬೀಯ ಅಲ್ಲ.

3. (a) ನಿಯತ ಆಧಾರ.

(c) $\{1, \sqrt{12}(t-\frac{1}{2}), \sqrt{180}\,(t^2-t+\frac{1}{6}), 20\sqrt{7}\,(t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{5}t-\frac{1}{20})$

4. (a) ಮೊದಲನೇ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ $(2, 1, 0)$ ಇ
ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು : $(1/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}, 0)$.
ಎರಡನೇ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ $(3, -1, 2)$ ಇದ
ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು : $(3, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$.

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು : $(1, -1/\sqrt{3}, 4/\sqrt{6}, -\sqrt{2}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು : $(1, \sqrt{3}, 0, 0)$.

6. $U = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 3/\sqrt{70} & -1/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{5} & -6/\sqrt{70} & 2/\sqrt{14} \\ 0 & 5/\sqrt{70} & 3/\sqrt{14} \end{bmatrix}$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{70}/5 & 2\sqrt{70}/35 \\ 0 & 0 & 4\sqrt{14}/7 \end{bmatrix}$$

ಭಾಗ 4

1. (a) $(1, 1, -1)$ ರಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ.
   (c) $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ ರಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ.
   (e) $\{(3, 0, 1, 2), (1, 0, 1, 1)\}$ ರಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ.

2. (a) Mಗೆ: $\{(-1/\sqrt{35}, 5/\sqrt{35}, 3/\sqrt{35})\}$.
   $M^{\perp}$ಕ್ಕೆ: $\{(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), (2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})\}$.
   (c) Mಗೆ: $\{(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0), (-3/\sqrt{70}, -6/\sqrt{70}, 5/\sqrt{70})\}$.
   $M^{\perp}$ಕ್ಕೆ: $\{(1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14})\}$.

3. (a) $(\frac{6}{35}, -\frac{30}{35}, -\frac{18}{35})$ (c) $(\frac{15}{14}, -\frac{6}{7}, \frac{3}{14})$

4. (a) $\{a\,(7, 0, -10),\ b\,(61, -107, 81)\}$, ಇಲ್ಲಿ $a^2 = \frac{1}{107}$, $1/b^2 = 61^2 + 46^2 + 35^2$.
   (c) $\{1/\sqrt{11}\,(-1, 0, 4)\}$

5. (a) $-\frac{1}{35}(-1, 5, 3)$ (c) $(\frac{10}{11}, -1, \frac{4}{11})$

6. (a) $Y = (3, -1, 0)$

7. (a) $\{a(18t^2 - 7),\ b(420t^2 - 447t + 85)\}$, ಇಲ್ಲಿ $1/a^2 = \frac{149}{5}$ ಮತ್ತು $1/b^2 = \int_0^1 (420t^2 - 447t + 85)^2 dt$.

(c) $g = 390t^2 - 372t + 57$

10. (a) ಕೇವಲ $x^3 + y^2 = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ (x, y) ಯು ಚರಃ ಆಗಿದೆ.

(d) $y = 3, -1 \leq x \leq 1$ ಇರಲು g ಯು ತನ್ನ ಗರಿಷ್ಠವನ ಹೊಂದಿದೆ.

ಭಾಗ 5

1. (a) $T^*(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$,

(c) $T^* = T$

(e) $T^*(x, y, z) = (-y - 2z, x - 3z, 2x + 3y)$

2. (a) $T^*(x, y) = (3x + y, -4x - y)$

3. (a) $T^*_1 f = -T_1 f + f(1)(30t^2 - 24t + 3) - f(0)(30t^2 - 36t + 9)$

(c) $T^*_3 f = -T_2 f + f(1)(30t^2 - 24t + 3)$

(e) $T^*_5 = T_5$

4. (a) ಆಧಾರ: $\{(1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, -2/\sqrt{2})\}$.

T ಯ ಮಾತೃಕೆ: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. T^* ನ ಮಾತೃಕೆ: $\begin{bmatrix} 1 & (\\ 2 & \end{bmatrix}$

5. (a) $T_1^* T_2(f) = -$

$$t \frac{d^2 f(t)}{dt^2} - \frac{df(t)}{dt} + \frac{df(1)}{dt}(30t^2 - 24t + 3)$$

(c) $(T_2^* T_1^*)(1) = 180t^2 - 168t + 24$; $T_2^* T_1^*($ $= 150t^2 - 144t + 22$;

$T_2^* T_1^*)(t^2) = 120t^2 - 116t + 18$

(e) $2T_5$

6. (a) $T^* A = C^t A$ (c) $T^* A = AC^t + C^t A$

9. (a) $1(b)$ ಮತ್ತು $1(c)$ ಭಾಗಗಳು ಲಂಬೀಯವಾಗಿವೆ ; $1(c)$ ಮತ್ತು $1(d)$ ಗಳು ಸಮಾಂಗವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು $1(e)$ ಯು ವಿಷಮ ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ. T ಯು ಭಾಗ $1(b)$ ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $T_1(x, y, z) = ((\sqrt{2}/2)x, y, (\sqrt{2}/2)z)$, $T_2 = ((-\sqrt{2}/2)z, 0, (\sqrt{2}/2)z)$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $T = T_1 + T_2$.

(b) T ಯು $2(a)$ಯ ಪರಿಕರ್ಮಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $T_1(x, y) = (2x, -2x)$ ಮತ್ತು $T_2(x, y) = (-x - y, 2x + y)$ ಆಗಿರುವಲ್ಲಿ, $T = T_1 + T_2$.

ಭಾಗ 6

2. (a) -6 (c) -18 (e) 4

6. (a) 0

7. (a) ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ ಅಲ್ಲ.

(c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

11. (a) $x = \frac{7}{5}$, $y = \frac{8}{5}$, (c) $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{3}{5}$, $z = \frac{2}{5}$

ಭಾಗ 7

3. (a) $(Z, Y) \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಖಾಲಿ. $(Z, Y) = 0$ ಮತ್ತು $Y \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ Y ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ $Y \times Z / |Y|^2$ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಿರುವ ರೇಖೆಯು ಇದೇ ಆಗಿದೆ.

(c) $(Z, Y) = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $(X, Z) = 0$ ಅಥವಾ $(X, Y) = 0$ ಯಿಂದ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಸಮತಲಗಳು ಇವೇ.

4. (a) -1 (c) $(-1, -4, 4)$

(e) $(30, -24, 6)$ (g) $\frac{1}{3}$ (i) $\frac{1}{3}$

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಭಾಗ 1

1. (a) $x = z$ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶವು 1ಕ್ಕೆ ಸೇರಿರುವ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಈ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶವು -1ಕ್ಕೆ ಸೇರಿರುವ ಒಂದು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಸದಿಶವಾಗಿದೆ.

   (c) ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $T(1, 1, 0) = (1, 1, 0)$

   (e) ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $T(0, 1, -1) = (0, 1, -1)$.

3. (a) ಕರ್ಣರೇಖ್ಯವಲ್ಲ. (c) ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ.

4. (a) (2a) $T^k(x, y, z) =$

   $(x, 2(2^k - 1)x + 2^k y, \frac{3}{2}(1 - 2^{k+2} + 3^{k+1})x + 3(3^k - 2^k)y + 3^k z)$ (2c) $T^k = 3^{k-1}T$

   (2e) $T^k A = B^k A$, ಇಲ್ಲಿ $B^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^k \end{bmatrix}$

   (b) (2a) ಹೌದು. (2c) ಹೌದು. (2e) ಇಲ್ಲ.

   (c) (2a) $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 2$ ಮತ್ತು $\lambda \neq 3$

   (2c) $\lambda \neq 0$ ಮತ್ತು $\lambda \neq 3$

   (2e) $\lambda \neq 1$ ಮತ್ತು $\lambda \neq 3$

9. (a) ಹೌದು. (c) ಇಲ್ಲ. (e) ಇಲ್ಲ.

11. $A^{93} = A$.

14. $y_1 = 2e^{2t} - e^{4t}$, $y_2 = 2e^{2t} + e^{4t}$

ಭಾಗ 2

1. (a) $q = t^2 + t + 1$, $r = 0$

   (c) $q = 0$, $r = f$ (e) $q = 0$, $r = f$

6. (a) $P_1 = \dfrac{(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)}{24}$,

$P_2 = \dfrac{(t-1)(t-3)(t-4)(t-5)}{-6}$, ಇತ್ಯಾದಿ.

(c) $(1-t)(t-5)(\frac{13}{12}t^2 - \frac{20}{3}t + 10)$

8. (a) $f(T)(x,y,z) = (34x - 27y - 2z,\ 6x + 142y + 23z,\ 15x - 2y + 8z)$

(c) $(-386x - 4748y - 705z,\ 10201x + 18606y + 3338z,\ 518x - 705y - 12z)$

(e) $(396x - 2118y - 97z,\ 1617x + 3240y + 566z,\ 181x - 91y + 38z)$

9. (a) $f(A) = \begin{bmatrix} 14 & 33 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$, $g(A) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$q(A) = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{18}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$, $r(A) = \begin{bmatrix} \frac{22}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & \frac{22}{3} \end{bmatrix}$

$(qq + r)(A) = f(A) = \begin{bmatrix} 14 & 33 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$

(c) $f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $g(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$q(A) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$, $r(A) = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$

$(gq + r)(A) = f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. $f(A) = \begin{bmatrix} 64 + 3^{16} & 25 + 3^{16} - 2^{16} & 0 \\ 0 & 29 + 2^{16} & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

ಭಾಗ 3

1. (a) $t^3 - 5t^2 + 7t - 12$ (c) $t(t-1)^2$

(e) $t(t-1)(t-2)$

2. (a) t^3 (c) $(t^2-5t+3)(t^2-2t-1)$

3. $T^{-1}=(-1/a_0)(a_1I+a_2T+\cdots+a_nT^{n-1})$

4. (a) $({}^1a)\ p=\Delta$ $({}^1c)\ p=t(t-1)$

$({}^1e)\ p=\Delta$

(b) $({}^2a)\ t^3$ $({}^2c)\ p=\Delta$

8. (a) $p=(t-1)^4$ (c) $p=(t^2-2t+3)^2$

ಭಾಗ 4

1. (a) ಇಲ್ಲ. (c) ಹೌದು. (e) ಇಲ್ಲ. (g) ಹೌದು.

(i) ಇಲ್ಲ.

2. (a) ವ್ಯಾಪ್ತಿಯೆಂದರೆ ರೇಖೆ $y=x$ ಆಗಿದೆ; ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯು ರೇಖೆ $x=0$ ಆಗಿದೆ.

(c) ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಸಮತಲ $x+y=0$ ಆಗಿದೆ; ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯು ರೇಖೆ $x+z=y=0$ ಆಗಿದೆ.

(e) ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಸಮಾಂಗ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿದೆ; ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯು ವಿಷಮ ಸಮಾಂಗ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿದೆ.

(g) ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು $\frac{1}{2} < t \leq 1$ಕ್ಕೆ $f(t)=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ f ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗಣವಾಗಿದೆ; ಶೂನ್ಯಸಮಷ್ಟಿಯು $f(t)=0$ $0\leq t\leq \frac{1}{2}$ ಆಗಿರುವಂತೆ f ನ ಗಣವಾಗಿದೆ.

3. (a) ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ, $E(x,y)=(y/2,\ y)$.

(d) ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ, $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & 0 \end{bmatrix}$

4. (a) $E(x, y) = (-x/3 + 2y/3,\ -2x/3 + 4y/3)$

11. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(g) $\dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1-\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

$\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

13. (a) ಈ ಪ್ರಲಂಬನವು ನಿಯತ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಲಂಬೀಯವಾಗಿದೆ, ಆದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಅಲ್ಲ.

(c) ಈ ಪ್ರಲಂಬನವು ಎರಡನೇ ಆಂತರಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಲಂಬೀಯವಾಗಿದೆ.

14, (a) $$P_0 = \begin{bmatrix} \frac{5+\sqrt{29}}{2a} & \frac{5-\sqrt{29}}{2b} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

$$a^2 = (29 + 5\sqrt{29})/2, \quad b^2 = (29 - 5\sqrt{29})/2$$

(c) $$P_0 = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{17}}{4a} & \frac{1-\sqrt{17}}{4b} & 0 & 0 \\ 1/a & 1/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2c} & \frac{1-\sqrt{5}}{2d} \end{bmatrix}$$

$$a^2 = \frac{17+\sqrt{17}}{8}, \quad b^2 = \frac{17-\sqrt{17}}{8}, \quad c^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2},$$

$$d^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

15. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

24. $$f(A) = \begin{bmatrix} 0 & \log 2 & \log \frac{3}{2} \\ 0 & \log 2 & \log \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \log 3 \end{bmatrix}$$

26. (b) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

27. (c) R^2, $\{(0, 0)\}$ ಮತ್ತು x – ಅಕ್ಷ.

ಅಧ್ಯಾಯ 4

ಭಾಗ 1

1. (a) ಇಲ್ಲ. (c) ಇಲ್ಲ. (e) ಹೌದು. (g) ಇಲ್ಲ. (i) ಇಲ್ಲ.

2. (a) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$

4. $(A+B)^{10} = \begin{bmatrix} 4^{10} & 0 \\ 0 & 6^{10} \end{bmatrix}$, $f(A+B) = \begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^6 \end{bmatrix}$

ಭಾಗ 2

1. (a) $P(x,y) = (2x+y, x+y)$
   (c) $P(x,y) = (100x+y, x)$

2. (a) $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 51 & 50 \\ 50 & 49 \end{bmatrix}$

6. (a) $\frac{19 \pm 5\sqrt{13}}{2}$ ಮತ್ತು $19 > 5\sqrt{13}$

7. (a) $B = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4} & \frac{-3+\sqrt{21}}{4} \\ \frac{-3+\sqrt{21}}{4} & \frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$

ಭಾಗ 3

1. (a) ಇಲ್ಲ. (c) ಹೌದು.

5. (a) ಹೌದು. (c) ಹೌದು.

ಭಾಗ 4

1. (a) ವಾಸ್ತವಿಕ ಭಾಗ : $9\sqrt{2} - 5$; ಊಹ್ಯ ಭಾಗ : $-5\sqrt{2} - 9$.
   (c) ವಾಸ್ತವಿಕ ಭಾಗ : -38; ಊಹ್ಯ ಭಾಗ : 124.
   (e) 9

2. (a) ಸ್ಥಾನ = ಶೂನ್ಯತೆ = 2.

(c) ವ್ಯಸ್ತವು ಹೀಗಿದೆ $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -i \\ \frac{1+i}{2} & \frac{-(1+i)}{2} & \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} & 0 \end{bmatrix}$

3. (a) ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ ಇದು M ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)$ $(0, 0, 1)\}$ C^3ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ.

(c) ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\{(1, 1, 0)\}$ ಯು M ಗೆ ಮ $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ ಯು C ಒಂದು ಆಧಾರವಾಗಿದೆ.

4. (a) $\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ -1+i & i & i \\ 2-i & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} i+3 & i+5 & 3i \\ 2+5i & 5+6i & -4+3i \\ -2-3i & -5-6i & 2-3i \end{bmatrix}$, ಉದಾಹರಣೆಗೆ.

6. $\Big\{1\sqrt{5}(1, i, 1), 1\sqrt{15}(-1-i, 1-i, -1+4i),$

$\frac{1}{\sqrt{15}}\Big(3i-1, \frac{3-4i}{3}, \frac{-3+4i}{3}\Big)\Big\}$

7. (a) $\sqrt{180}(t^2 - t + \frac{1}{6})$ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಉಪಸಮಷ್ಟಿ.

(c) $D^*1 = 12t - 6$, $D^*t = 30t^2 - 24t + 2$,

$D^*t^2 = 30t - 26t + 3$

12. (a) $P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, ಉದಾಹರಣೆಗೆ.

14. $B=\begin{bmatrix} 3 & \frac{5+3i}{4} \\ \frac{5-3i}{4} & 0 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} -1 & \frac{5-3i}{4} \\ \frac{5+3i}{4} & 3 \end{bmatrix}$

15. n^2

17. $P_0=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, ಉದಾಹರಣೆಗೆ.

18. $\begin{bmatrix} 33i-32 & 33i-31 \\ 32-i & 31-i \end{bmatrix}$

ಭಾಗ 5

2. (a) ಲಂಬ. (c) ಲಂಬವಲ್ಲ.

3. (a) ಲಂಬವಲ್ಲ. (c) ಏಕಾತ್ಮಕ.
(e) ವಿಷಮ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ. (g) ಲಂಬವಲ್ಲ.

5. (a) ಮಿಥ್ಯ ಉತ್‌ಕ್ಷೇಪಗಳು :

$$\frac{-1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -i \\ i & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix},$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -i \\ i & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

(c) ಮಿಥ್ಯ ಉತ್‌ಕ್ಷೇಪಗಳು :

$$\frac{-i}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} i\frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ -1 & i\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix},$$

$$\frac{i}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} i\frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ -1 & i\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

6. (a) $U=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{2/3} & 1\sqrt{3} \end{bmatrix}$

(c) $U=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

ಭಾಗ 6

1. (a) $2, 0$; ನಾನ್ಯಣಾತ್ಮಕ.

(c) $(1+\sqrt{5})/2, (1-\sqrt{5})/2$; ಸ್ವಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ.

(e) $\frac{1}{2}\left[2i+1 \pm (41)^{1/4}\left(\frac{-4}{82-10\sqrt{41}} + \frac{\sqrt{41}-5}{82-10\sqrt{41}}i\right.\right.$

(g) $\frac{i \pm 1}{\sqrt{2}}$; ಏಕಾತ್ಮಕ

4. (a) ವಿಷಮ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ.

(c) ಏಕಾತ್ಮಕವಲ್ಲ, ಧನಾತ್ಮಕವಲ್ಲ ಅಥವಾ ವಿಷಮ ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿಂ ಅಲ್ಲ.

5. ವಾಸ್ತವಿಕ ಭಾಗ :

$$H(\alpha,\beta) = \left[6\alpha + \left(\frac{2-13i}{2}\right)\beta,\ \left(\frac{2+13i}{2}\right)\alpha -\right.$$

ಊಹ್ಯಭಾಗ :

$$K(\alpha,\beta) = \left[3\alpha - \left(\frac{1+2i}{2}\right)\beta,\ \left(\frac{-i\ 1+2}{2}\right.\right.$$

7. $P^{1/2} = 0\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -i/2 \\ i/2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \sqrt{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & i/2 \\ -i/2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

9. $P=\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$, $U=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$

10. (a) 1, 2. (c) i

14. (a) $g(A)$ ಯು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿಲ್ಲ.

(c) $(kg)(A) = (t^2+1)(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -i/2 \\ i/2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(e) $h(A)k(A)m(A)(f(A))^2 = 0$

15. (a) $AB = BA$, ಇದು ಕೇವಲ Bಯು $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha + 2i\beta \end{bmatrix}$ ರೂಪದ್ದಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ

ಅಡ್ಡಸಾಲು	Row	ಏಕೈಕತೆ	Uniqueness
ಅದಿಶ	Scalar	ಓರೆ	Cross
ಅರ್ಧಖಚಿತ	Semi definite	ಕರ್ಣರೇಖ್ಯ	Diagonalizable
ಅನಂತ	Infinite	ಕರ್ಣರೇಖೆ	Diagonal
ಅಪವರ್ತಮೂಲ	Factor root	ಕ್ರಮಪಡಿಸಿದ	Ordered
ಅಭಿಜಾತ	Classical	ಕ್ರಮಯೋಜನೆ	Permutation
ಅವಲಂಬನೆ	Dependence	ಕಾರ್ಯವಿಧಾನ	Process
ಅಸಮತೆ	Ineqality	ಕೂಟರೂಪ	Block form
ಅಕ್ಷುದ್ರ	Nontrivial	ಕೋಟಿಜ್ಯಾನಿಯಮ	Cosin law
ಅಂತರ್‌ಧ್ರುವೀಕರಣ	Interpolation	ಕೋನ	Cone
ಅಂತಿಮ	Terminal	ಗಾತ್ರ	Volume
ಆದಿ	Initial	ಗುಣಕ	Multiple
ಆಧಾರ	Basis	ಗುಣಲಬ್ಧ	Product
ಆಯಾಮ	Dimension	ಘಟಕಗಳು	Components
ಆಂತರಿಕ	Inner	ಚರಮ	Extreme
ಉತ್ಪನ್ನ	Function	ಚರಮೀಯ	Extremal
ಉತ್‌ಕ್ಷೇಪ,		ಚಲನಕಲನ	Integral
ಪ್ರಲಂಬನ	Projection	ಜಾಡು	Trace
ಉಪ	Sub	ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ	Geometric
ಉಪಗಣ	Subset	ತ್ರಿಕೋಣೀಯ	Triangular
ಉಭಯ	Duel	ತ್ರಿಗ್ಮ	Triple
ಊರ್ಧ್ವ	Upper	ತ್ರಿಭುಜ	Triangle
ಊಹ್ಯಭಾಗ	Imaginary part	ದಾಖಲಾತಿ	Entry
ಋಣಾತ್ಮಕ	Negative	ದ್ವಿರೇಖಾತ್ಮಕ ರೂಪ	Bilinear form
ಏಕಕಾಲಿಕ	Simultaneous	ದ್ವಿರೇಖೀಯ	Bilinear
ಏಕತತ್ವಿ	Monic	ಧ್ರುವೀಕರಣ	Polarization
ಏಕಾತ್ಮಕ	Unitary	ಧೃಢಚಲನೆ	Rigid motion

ಧನಾತ್ಮಕ	Positive
ನಾನ್ಯೃಣಾತ್ಮಕ	Non-negative
ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ	Strictly
ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು	Coordineats
ನಿರ್ಧಾರಕ	Determinant
ನಿರ್ಮಿತ	Spanned
ನಿರಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆ	Absolute value
ನಿರವಲಂಬಿತ	Independant
ನಿಶ್ಚರ	Invariant
ನೀಟಸಾಲು	Column
ಪ್ರತಿಬಿಂಬ	Image
ಪ್ರತಿಬಿಂಬಕ	Isometric
ಪ್ರತಿಬಿಂಬನ	Isomorphison
ಪ್ರಧಾನ	Prime
ಪ್ರಮಾಣಕ	Norm
ಪ್ರಮೇಯ	Theorem
ಪರಿಕರ್ಮ	Cperation
ಪರಿಮೇಯ	Rational
ಪರಿವರ್ತನೆ	Transformation
ಪರಿವಹನಾ ಚಿತ್ರ	Flow diagram
ಪರಿಹಾರ	Solution
ಪ್ರಕ್ಷೇಪ ಚಿಹ್ನೆ	Parenthesis
ಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ	Adjoint
ಪ್ರಾಂತ	Domain
ಪೀನಮಧ್ಯಗಣ	Convex set
ಪೂರಕ	Complementary
ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ	Lemma
ಫಲನೋಕ್ತೀಯ	Functional
ಬಹುಪದಿ	Polynomial
ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿ	Polyhedron
ಬಾಣದ ನಿರೂಪಣೆ	Arrow representation

ಬಿಡಿಸುವ ವಿಧಾನ	Method of solving
ಬಿಂದು	Point
ಬೀಜಗಣಿತ	Algebra
ಬೈಜಿಕ	Algebraically
ಭಾಗಲಬ್ಧ	Quotient
ಭಾಗಾಹಾರ ಅಂಕಗಣಿತ	Division algorithem
ಭಿನ್ನಕಲನ	Differentiation
ಮಾತೃಕೆ	Matrix
ಮಿತಿ	Restriction
ಮಿಥ್ಯ	Spectral
ಮೂಲ	Root
ಮೂಲಭೂತ	Fundamental
ಮೊತ್ತ	Sum
ಯುಕ್ತ	Proper
ರೇಖಾಖಂಡ	Line Segment
ರೇಖೀಯ	Linear
ರೂಪಾಂತರ	Translation
ಲಂಬ	Perpendicular
ಲಂಬೀಯ	Orthogonal
ವರ್ಗಮೂಲ	Square root
ವರ್ಗಸೂತ್ರ	Quardratic formula
ವರ್ಗಾತ್ಮಕ	Quadratic
ವ್ಯತ್ಯಯಿಸಿದ	Commuted
ವ್ಯಸ್ತ	Inverse
ವ್ಯಾಖ್ಯೆ	Definition
ವ್ಯಾಪ್ತಿ	Range
ವಾಸ್ತವಿಕ	Real
ವಿಲೋಮಸಾಧ್ಯ	Itnveritb'e

ವಿಷಮ	Skew
ವ್ಯೂಹ	System
ವೃದ್ಧಿಸಿದ	Augmented
ಶುದ್ಧ ಊಹ್ಯ	Pure imaginary
ಶೂನ್ಯ	Zero
ಶೂನ್ಯತೆ	Nullity
ಶೇಷ	Reminder
ಸ್ವಗುಣಾರೋಪಣ	Automorphism
ಸದಿಶ	Vector
ಸ್ವಪಾರ್ಶ್ವಬಂಧಿ	Self adjoint
ಸಮಘಾತವ್ಯೂಹ	Homogenous system
ಸಮಲಂಬೀಯ	Orthonormal
ಸಮಷ್ಟಿ	Space
ಸಮಾಂಗ	Symmetric
ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ	Parallelogram
ಸಮಾಂತರೀಕೃತ	Parallelopiped
ಸಮಾನಾರ್ಥಕ	Equivalent
ಸಮ್ಮಿಶ್ರ	Complex
ಸಮೀಕರಣ	Equation
ಸ್ತರ	Degree
ಸ್ವರೂಪಾಂಕ	Characteristic
ಸರ್ವಸಮ	Similar
ಸಹಗುಣಕಗಳು	Coefficients
ಸಂಕುಚನೆ	Reduction
ಸಂಕುಚಿಸಲ ಸಾಧ್ಯವಾದ	Irreducible
ಸಂಬಂಧಿತ	Affine
ಸಂಯುಗ್ಮ	Conjugate
ಸಂಯೋಜನೆ	Combination
ಸಾಂತ	Finite
ಸ್ಥಾನ	Rank
ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟನ	Transpose
ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ	With respect
ಸಾಮ್ಯಕ	Identity
ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪ	General form
ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು	Constants
ಸೂತ್ರ	Formula
ಸೋಪಾನವ್ಯೂಹ	Echelon
ಕ್ಷುದ್ರ	Trivial
ಕ್ಷೇತ್ರ	Field

ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಕನ್ನಡಪುಸ್ತಕಗಳು

ಪುಸ್ತಕಗಳಿಗಾಗಿ ಮೆ॥ ಇಂಡಿಯಾ ಬುಕ್ ಹೌಸ್,

5ನೇ ಮೈನ್, ಗಾಂಧಿನಗರ, ಬೆಂಗಳೂರು-560009 ಇವರನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸಿ.

o o o o o

		(ಸಾದಾಪ್ರತಿ)	(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ)
1.	ಸುಭಿಕ್ಷತೆಗೆ ತೆರೆದ ಬಾಗಿಲು (ಪ್ರತಿಗಳು ತೀರಿವೆ)	2–00	
2.	ಪೀಡೆ ನಿರ್ವಹಣೆ ,,	5–00	
3.	ಕೀಟ ವಿಂಗಡಣೆ	15–00	
4.	ಕೀಟ ಹತೋಟಿ (ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	12–00	
5.	ಸಾಕು ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಭಾಗ 1	6–25	
6.	ತರಕಾರಿ ಬೇಸಾಯ (ಪ್ರತಿಗಳು ತೀರಿವೆ)	12–50	
7.	ಕೃಷಿ ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ ಶಬ್ದಾರ್ಥ ನಿರೂಪಣಾವಳಿ	5–00	6–25
8.	ಮಣ್ಣು ಮತ್ತು ನೀರು ಸಂರಕ್ಷಣಾ ಕೈಪಿಡಿ	15–00	19–00
9.	ರೈತರ ನೆಚ್ಚುಮೆಚ್ಚಿನ ಮರಗಳು	15–00	19–00
10.	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಭಾಗ–2	11–25	15–00
11.	ಮೈಸೂರು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಕೃಷಿ		10–00
12.	ಮಣ್ಣು ಮತ್ತು ನೀರು ನಿರ್ವಹಣೆ	15–00	19–00
13.	ಮಣ್ಣು	11–25	15–00
14.	ಕೃಷಿ ಸಹಕಾರ	6–25	10–00
15.	ಕಳೆಗಳು ಮತ್ತು ಕಳೆಗಳ ನಿಯಂತ್ರಣ	10–00	15–00
16.	ಗೋಸಂಪತ್ತು	6–25	10–00
17.	ಧಾನ್ಯದಾಸ್ತಾನು ತತ್ವ ಮತ್ತು ಪದ್ಧತಿಗಳು	7–50	11–25
18.	ಮಣ್ಣಿನ ಫಲವತ್ತತೆ ಹಾಗೂ ಉತ್ಪಾದಕತೆ	17–50	21–25
19.	ಪಶುವೈದ್ಯಕೀಯ ವಿಜ್ಞಾನ	7–50	11–25
20.	ಹೊಲದ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು	8–25	12–00
21.	ಟ್ರಾಕ್ಟರು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳನ್ನು ಸುಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿಡುವ ಕ್ರಮಗಳು	7–50	12–50

	(ಸಾದಾಪ್ರತಿ)	(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ)
22. ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಭಾಗ–3	10–00	15–00
23. ಕೃಷಿ ವಿಸ್ತರಣ ಶಿಕ್ಷಣ ಪದ್ಧತಿಗಳು	11–25	16–25
24. ಕಣಜದ ಪೀಡೆಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	15–00	19–00
25. ಸಸ್ಯ ವರ್ಗೀಕರಣ ಶಾಸ್ತ್ರ	15–00	20–00
26. ಪೌಷ್ಟಿಕ ಆಹಾರ	9–00	14–00
27. ಕಡಲ ಮೀನುಗಾರಿಕೆ	5–00	10–00
28. ಧಾನ್ಯದ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	10–75	
29. ಕಬ್ಬಿನ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	4-50	
30. ಶಿಶುವಿಹಾರ	9-50	13-25
31. ಬೇಳೆಕಾಳು ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	7-50	
32. ಕೃಷಿ ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ	9-50	14-00
33. ಇಲಿಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ನಿಯಂತ್ರಣ	9-50	13-25
34. ತರಕಾರಿ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	12.50	
35. ಹಣ್ಣಿನ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	16.25	
36. ಕ್ಯಾನಿಂಗ್	16–25	21-25
37. ಅಲಂಕಾರ ಸಸ್ಯಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	10-75	
38. ಜೀವಕೋಶ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಹಾಗೂ ಜೀವರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರ	20–00	25-00
39. ಎಲುಬುಶಾಸ್ತ್ರ	11-25	16-25
40. ಕಡಲೆಕಾಯಿ	10-00	15-00
41. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ ಭಾಗ–1	25-00	30-00
42. ತೆಂಗು, ಅಡಿಕೆ, ಇತರ ಗರಿಮರಗಳ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	9–00	

	(ಸಾದಾಪ್ರತಿ)	(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ)
43. ಪ್ಲಾಂಟೇಶನ್ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	12-00	
44. ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಕೋಳಿಸಾಕಣೆ	22-50	27-50
45. ಕಲ್ಲುನಾರು (ಭೂತಾಳೆ) ಗಿಡಗಳು	5-00	
46. ಎಣ್ಣೆ (ಬೀಜ) ಕಾಳು ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	7-50	
47. ಹತ್ತಿ(ನೂಲು) ಹಾಗೂ ನಾರಿನ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	10-00	
48. ಹಸುರೆಲೆ ಗೊಬ್ಬರ, ಮೇವು ಹಾಗೂ ಉಪ್ಪುನೇರಳೆ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	5-00	
49. ಮಾದಕ (ಹೊಗೆಸೊಪ್ಪು, ಗಾಂಜ) ಹಾಗೂ ಸಾಂಬಾರ (ಅರಿಶಿನ ಇತ್ಯಾದಿ) ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	3-75	
50. ಕೃಷಿ ಉಪಯೋಗಿ ಕೆಲವು ವೃಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	4-50	
51. ಸಸ್ಯಸಾಮ್ರಾಜ್ಯ	25-00	30-00
52. ಭಾರತೀಯ ಗ್ರಾಮೀಣ ಯುವಕ ರೈತ ಸಂಘಟನೆ	8-25	13-25
53. ಮೀನುಗಾರಿಕೆ	10-00	15-00
54. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ ಭಾಗ-2	20-00	25-00
55. ಪಶುರೋಗಗಳು ಹಾಗೂ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಆರೋಗ್ಯ	12-50	17-50
56. ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಜೇನುಸಾಕಣೆ	20-00	25-00
57. ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿ ಮೂಲದ ಸೋಂಕು ರೋಗಗಳು	7-50	12-50
58. ಮೂಲ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ	19-00	24-00
59. ಜೇನು ಸಾಕಣೆ	17-50	22-50
60. ಕೃಷಿ ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ	3-25	
61. ತರಕಾರಿ ಬೆಳೆಗಳ ಕೀಟನಿಯಂತ್ರಣ	12-50	19-00
62. ಬೆಳೆ ಕೀಟಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		125-00
63. ಸಸ್ಯ ತಳಿಅಭಿವೃದ್ಧಿ ವಿಧಾನಗಳು		65-00

ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿವೆ

64. ದೊಡ್ಡರೋಗ
65. ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಭ್ರೂಣಶಾಸ್ತ್ರ
66. ಹುಲಿ–ಭಾರತದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮೃಗ
67. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತ
68. ಸಾವಯವ ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ
69. ಮಣ್ಣು ನಿರ್ವಹಣೆ, ಸಂರಕ್ಷಣೆ, ಬೆಳೆ ಉ
70. ಕೃಷಿ ಅನಿಲಯಂತ್ರ ಹಾಗೂ ಟ್ರಾಕ್ಟರು
71. ಸಹಕಾರಿ ಬೇಸಾಯ
72. ಕೋಶ
73. ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ರೂಪಿಕೆಗಳು
74. ನೀರಾವರಿ ತತ್ವ ಮತ್ತು

9-50

75. ಮಣ್ಣು ಶಿಲೀಂಧ್ರ
76. ಪ್ರಾಣಿಗಳ ವರ್ತನೆ
77. ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ
78. ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಭಾಗ–1
79. ಕೀಲು ಮತ್ತು ಸ್ನಾಯುಶಾಸ್ತ್ರ
80. ಕುರಿಸಾಕಣೆ
81. ಜೋಳ
82. ಹಂದಿ ಭ್ರೂಣಶಾಸ್ತ್ರ
83. ಆಧುನಿಕ ಹೈನುಗಾರ ದನಗಳ ನಿರ್ವಹಣೆ
84. ಮತ್ಸ್ಯ ಶಾಸ್ತ್ರ
85. ಹಣ್ಣು ಮತ್ತು ತರಕಾರಿಗಳ ಸಂರಕ್ಷಣೆ
86. ಕೃಷಿ ನಿರ್ವಹಣೆ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ
87. ತೆಂಗು
88. ಕೆಲವು ಸಸ್ಯಗಳ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಇಂಗ್ಲಿಷ
89. ಮೀನು ಮತ್ತು ಇತರ ಸಾಗರೋತ್ಪನ್ನ
90. ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ